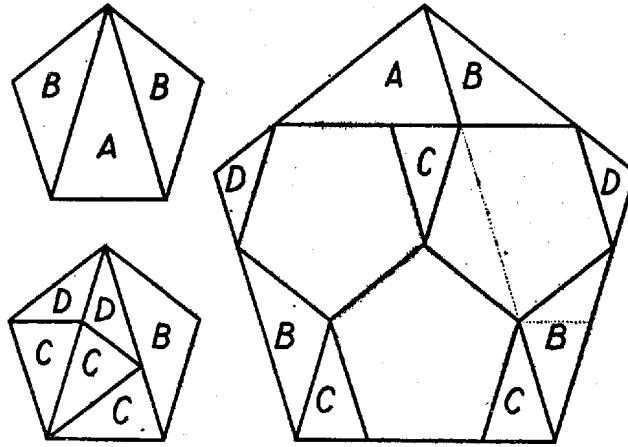


Figyeljük meg, hogy a nagy szabályos ötszög minden belső osztóvonalára párhuzamos az ötszög egy oldalával. Ebből következik – figyelembe véve, hogy a szabályos ötszög mindegyik szöge 108° –, hogy az A és C jelű háromszögek szögei 72° , 72° , 36° , a B és D jelűeké 36° , 36° , 108° , vagyis mindegyik háromszög egyenlő szárú, és a 3 kis ötszögben minden szög 108° . Továbbá, hogy a felső és a jobb alsó B háromszög egyik-egyik szára az ötszög egyik átlójára esik (az ábra pontozott vonala, ez nem osztóvonal!), ez az átló a jobb felső kis ötszögből egy a D -höz hasonló háromszöget vág le, a maradék négyszög szimmetrikus trapéz, és ezért a mondott B háromszögek egybevágók.



Azt is látjuk, hogy – a felső A , B , háromszög-párt figyelmen kívül hagyva – az osztóvonalak hálózata szimmetrikus az eredeti ötszög függőleges tengelyére, továbbá, hogy a két felső kis ötszögnek is van függőleges szimmetriatengelye. Ezekből és a háromszögek egyenlő szárú voltából lépésről lépésre következik, hogy a 3 kis ötszög összes oldalai egyenlők, így ezek is szabályos ötszögek, az ugyanolyan jelű háromszögek egybevágók, továbbá az A és D jelű háromszögek alapja, valamint a B és C jelű háromszögek szára egyenlő a kis ötszögek oldalával, végül (az A , B háromszögpárból az), hogy A szára egyenlő B alapjával.

Ezekből adódik, hogy a különálló kis ötszögek közül a B -, A -, B - háromszögekből összeállítottban minden szög egyenlő, és minden oldal is egyenlő, tehát ez is szabályos ötszög.

Már csak azt kell belátnunk a különálló alsó ötszög céljára, hogy egy C és egy D háromszöggel hiánytalanul és átfedés nélkül lefedhető a B háromszög, az A háromszög pedig két C -vel és egy D -vel, más szóval, hogy a C - és D háromszög szárainak összege is és alapjaik összege is egyenlő a B háromszög alapjával. Az első egyenlőség abból adódik, hogy a főábra jobb alsó B háromszöge 108° -os szögének csúcsán áthúzott vízszintes egyenes (az ábrán pontozva) a háromszöget nyilvánvalóan egy C és egy D háromszögre vágja szét; a második pedig abból, hogy a főábrán A vízszintes helyzetű szára egyenlő C alapjának és a kis ötszög oldalának – vagyis D alapjának – összegével.

Ezzel a szemléletre támaszkodó sejtést a kimondott megfigyelések felhasználásával bebizonyítottuk.

Losonci Zoltán (Szeged, Vedres I. ép. ip. t. II. o. t.)

Megjegyzések. 1. A kis és a nagy ötszög hasonló, területük aránya a fentiek szerint $1 : 5$, így oldalai aránya $1 : \sqrt{5}$. Valóban, a nagy ötszög oldalát véve egységnek a felső csúcsból jobbra lefutó átló hossza a feladat közlése szerint $(\sqrt{5} + 1)/2$, másrészt ez az átló egyenlő a kis ötszög x oldala 2-szeresének és átlójának összegével:

$$x \left(1 + \frac{\sqrt{5} + 1}{2} + 1 \right) = x \frac{5 + \sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2},$$

amiből $x = 1/\sqrt{5}$.

2. Adott szabályos ötszögbe a feldaraboló hálózat az alábbiak szerint szerkeszthető bele, pusztán a szokásos háromszög vonalzópár használatával. Az ötszög bármelyik 2 szimmetriatengelyének metszéspontja megadja a 3 kis ötszög közös csúcsát (ugyanis a két D háromszög tengelyére mind a hozzájuk csatlakozó kis ötszög, mind a nagy ötszög tükrös), a tengelyek a derékszög vonalzó 90° -os átbillentésével rajzolhatók. A közös csúcsból kiinduló 4 félegyenest párhuzamos csúsztatással rajzoljuk meg, a rajtuk levő további csúcsot a nagy ötszögnek a felső csúcsból induló átlói metszik ki; ezután már csak párhuzamosok rajzolása van hátra.

A közös csúcsból húzott 4 félegyenest visszafelé való meghosszabbításai a nagy ötszög kerületéből 4 további csúcs-pontot közvetlenül is kimetszenek. A kerületen lévő további két csúcspon a középponton átmenő vízszintessel is kimetszhető.