

I. megoldás. Az állításnak 1-nél nagyobb egész n -ekre van értelme. Jelöljük az $x_1, \dots, x_k$ számok összegét S_k -val, szorzatukat P_k -val, ekkor a következő egyenlőtlenséget kell bizonyítani:

$$(1) \quad S_n - P_n < n - 1, \quad \text{ha} \quad 0 < x_i < 1 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Az állítást teljes indukcióval bizonyítjuk. $n = 2$ esetén

$$S_2 - P_2 = x_1 + x_2 - x_1 x_2 = x_1 + x_2(1 - x_1) < x_1 + (1 - x_1) = 1,$$

mert $x_2 < 1$, és $1 - x_1$ pozitív, miután $x_1 < 1$.

Tegyük fel, hogy valamilyen $n = k (\geq 2)$ értékre igaz az állítás és vizsgáljuk $k + 1$ számú, 1-nél kisebb pozitív x_i számra (1) bal oldalát:

$$\begin{aligned} S_{k+1} - P_{k+1} &= S_k + x_{k+1} - P_k x_{k+1} = S_k + x_{k+1}(1 - P_k) < S_k + \\ &+ (1 - P_k) = S_k - P_k + 1, \end{aligned}$$

mivel $x_{k+1} < 1$ és $1 - P_k > 0$, mert a feltételek szerint $P_k < 1$. Feltevésünket az 1-nél kisebb pozitív $x_1, \dots, x_k$ számokra alkalmazva, az első különbség kisebb $k - 1$ -nél, s így

$$S_{k+1} - P_{k+1} < k = (k + 1) - 1,$$

tehát az állítás helyessége öröklődik k -ről $k + 1$ -re. Mivel $n = 2$ -re már beláttuk, hogy helyes, így minden n -re igaz.

Fialovszky Béla (Esztergom, Temesvári Pelbárt Ferences g. II. o. t.)

II. megoldás. A bizonyítandó állítást a következő alakban írhatjuk:

$$x_1 x_2 \dots x_n > x_1 + x_2 + \dots + x_n - (n - 1), \quad \text{ha} \quad 0 < 1 (i = 1, \dots, n).$$

Ismét teljes indukcióval bizonyítunk. $n = 2$ -re a bal oldalból levonva a jobbat

$$x_1 x_2 - x_1 - x_2 + 1 = (1 - x_1)(1 - x_2) > 0,$$

mert $x_1 < 1$, $x_2 < 1$. Az állítás tehát ez esetben helyes.

Tegyük fel, hogy az állítás helyes valamilyen $n = k (\geq 2)$ esetre, és legyenek adva az 1-nél kisebb pozitív $x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}$ számok. Feltevésünk szerint az első k számra

$$x_1 x_2 \dots x_k > x_1 + x_2 + \dots + x_k - (k - 1).$$

Szorozzuk ezt meg a pozitív x_{k+1} -gyel, majd alkalmazzuk a jobb oldalon fellépő $x_i x_{k+1}$ szorzatokra ($i = 1, \dots, k$) az $n = 2$ -re már bizonyított egyenlőtlenséget. (Tehetjük, mert $0 < x_i < 1$ ($i = 1, \dots, k$), és $0 < x_{k+1} < 1$):

$$\begin{aligned} x_1 x_2 \dots x_k \cdot x_{k+1} &> x_1 x_{k+1} + x_2 x_{k+1} + \dots + x_k x_{k+1} - (k - 1) x_{k+1} > \\ &> x_1 + x_{k+1} - 1 + x_2 + x_{k+1} - 1 + \dots + x_k + x_{k+1} - 1 - (k - 1) x_{k+1} = \\ &= x_1 + x_2 + \dots + x_k + x_{k+1} - k. \end{aligned}$$

Ezzel a feladat állítását igazoltuk.

Megjegyzés. Mindkét bizonyítás gondolatmenetével belátható, hogy az állítás az $0 \leq x_1 \leq 1$ ($i = 1, \dots, n$) feltétel mellett is teljesül, kivéve, ha az x_i értékek közt szerepel legalább $n - 1$ számú 1-es; utóbbi esetben (1)-ben is egyenlőség áll fenn.

Babai László (Budapest, Fazekas M. gyak. g. II. o. t.)