

Az idézett  $4 \times 4$  szorzatot tartalmazó szorzótáblát és a  $40 \times 40$  szorzatot tartalmazó szorzótábla egy 5 soros 5 oszlopos részletét bemutatjuk, a szóban forgó utolsó jegy, ill. utolsó két jegy vastag betűtípussal ki van emelve. Az utóbbi táblázaton látható a **11**, **39** és **97** végződés ismétlődése, de mindegyik más sorban, más oszlopban áll.

|   | 1        | 3         | 7         | 9         |    | 87          | 89          | 91          | 93          | 97          |
|---|----------|-----------|-----------|-----------|----|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| 1 | <b>1</b> | <b>3</b>  | <b>7</b>  | <b>9</b>  | 21 | <b>1827</b> | <b>1869</b> | 1911        | <b>1953</b> | <b>2037</b> |
| 3 | <b>3</b> | <b>9</b>  | 21        | <b>27</b> | 23 | <b>2001</b> | <b>2047</b> | <b>2093</b> | <b>2139</b> | <b>2231</b> |
| 7 | <b>7</b> | 21        | <b>49</b> | <b>63</b> | 27 | <b>2349</b> | <b>2403</b> | <b>2457</b> | <b>2511</b> | <b>2619</b> |
| 9 | <b>9</b> | <b>27</b> | <b>63</b> | 81        | 29 | <b>2523</b> | <b>2581</b> | <b>2639</b> | <b>2697</b> | <b>2813</b> |
|   |          |           |           |           | 31 | <b>2697</b> | <b>2759</b> | <b>2821</b> | <b>2883</b> | <b>3007</b> |

A táblázatban a 100-féle kétjegyű számvégződés közül nem léphet fel az 50 páros végződés, mert az összeszorozott 01, 03, 97, ..., 93, 97, 99 számok mindegyike páratlan, így a szorzatuk is páratlan:

$$(2k+1)(2m+1) = 2(2km+k+m) + 1. \quad (k, m \text{ egész})$$

Továbbá az 50-féle páratlan kétjegyű végződés közül nem léphetnek fel az 5-re végződők; az ilyenek száma 10. Ha ugyanis egy (egész) szám 5-re végződik, akkor 5-nek páratlan többszöröse (esetleg 1-szerese), így bármely szorzat előállításában legalább az egyik tényező 5-tel osztható, mert az 5 törzsszám, és ezért 5-re is végződik; ilyen tényezőt pedig itt nem vettünk figyelembe. A maradó 40-féle kétjegyű végződés éppen az a 40 kétjegyű szám, amit a szorzótábla sorainak (és oszlopainak) ún. *bemenő számai*ként figyelembe vettünk. Így a feladat állítása élesebben úgy fogalmazható, hogy bármely sor 40 szorzatából a kétjegyű végződések leválasztva valamilyen sorrendben a bemenő számokat kapjuk.

Tegyük fel az állítással ellentétben, hogy az  $A$  bemenőszámhoz tartozó sorban két különböző szorzat kétjegyű végződése egyenlő, legyen oszlopaik bemenőszáma  $B$ , ill.  $C$ , a végződés pedig  $D$ . Ekkor

$$AB = 100M + D, \quad AC = 100N + D.$$

(ahol  $M, N$  egész számok), és így különbségük

$$AB - AC = A(B - C) = 100(M - N),$$

osztható 100-zal. Törzsszámok szorzataként  $100 = 2^2 \cdot 5^2$ , így a bal oldal osztható  $2^2$ -nel is,  $5^2$ -nel is. Egy szorzat csak úgy osztható egy törzsszámmal, ha legalább egy tényezője osztható vele. Ámde a feltevések miatt  $A$  sem 2-vel, sem 5-tel nem osztható, tehát  $B - C$  osztható  $2^2$ -nel is,  $5^2$ -nel is, azaz 100-zal. Két kétjegyű szám különbsége azonban kisebb 100-nál, ezért az oszthatóság csak  $B - C = 0$ ,  $B = C$  esetén állhat fenn, ami pedig ellentmondás, hiszen  $B$  és  $C$  a feltevés szerint különbözők.

Lehetetlen tehát, hogy egy sorban két kétjegyű végződés megegyezzek, így minden sorban bármely két végződés különböző. Ezt kellett bizonyítanunk.

*Moson Péter* (Budapest, Fazekas M. Gyak. g. I. o. t.)