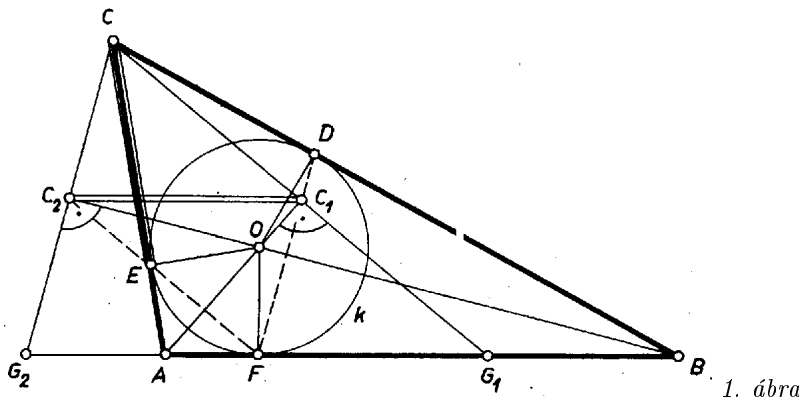


Messe az  $AB$  egyenest a  $CC_1$  egyenes  $G_1$ -ben,  $CC_2$  pedig  $G_2$ -ben, és legyen a beírt  $k$  kör érintési pontja a  $BC$  oldalon  $D$ , az  $AB$ -n  $F$  (1. ábra). Így  $C$  és  $G_1$ , továbbá  $E$  és  $F$  tükrös pontpár az  $AC_1$  szögfelezőre, hasonlóan  $C$  és  $G_2$ , valamint  $D$  és  $F$  egymás tükröképei  $BC_2$ -re. Ezért egyrészt  $CG_1 = 2 \cdot CC_1$ ,  $CG_2 = 2 \cdot CC_2$ , tehát  $C_1C_2$ , mint a  $CG_1G_2$  háromszög középvonala, fele a  $G_1G_2$  szakasznak. Másrészt

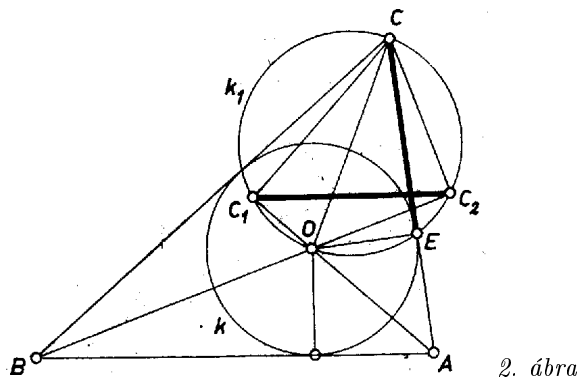
$$G_1G_2 = G_1F + FG_2 = CE + DC = 2 \cdot CE,$$

mert  $CD$  és  $CE$  a  $k$ -hoz húzott érintőszakaszok, így valóban  $C_1C_2 = CE$ .

A felhasznált  $G_1, G_2$  metszéspontok mindig létrejönnek, mert pl.  $CC_1$ -nek  $AB$ -vel bezárt (egyik) szöge  $(180^\circ - \alpha)/2$ , tehát  $CC_1$  nem lehet párhuzamos  $AB$ -vel. – Továbbá  $F$  mindig a  $G_1G_2$  szakaszon van, ugyanis az  $F$ -nek  $G_1$  azon az oldalán van, mint a  $B$  csúcs,  $G_2$  pedig azon, mint a  $A$ . Valóban,  $FE$  elválasztja a vele párhuzamos  $G_1C$  egyenes  $C$  pontját  $A$ -tól – hiszen  $E$  az  $AC$  szakaszon van –, és hasonlóan  $A$ -t  $B$ -től. A  $G_2$ -re mondott állítás pedig a pontoknak az  $FD$  egyeneshez viszonyított helyzete alapján hasonlóan látható be.



*Megjegyzés.* A  $CD = CE$  egyenlőségből azt is kaptuk, hogy  $F$  felezi a  $G_1G_2$  oldalt, így a  $CG_1G_2\Delta$ -ben  $FC_2$  és  $FC_1$  is középvonalak. Ezért  $FC_1$  párhuzamos  $G_2C$ -vel, így merőleges a  $BC_2$  szögfelezőre, tehát átmegy  $F$  tükröképén, a  $D$  ponton, amit úgy is mondhatunk, hogy a  $k$  kör  $D, F$  érintési pontjait összekötő egyenes átmegy  $C$ -nek az  $A$ -ból kiinduló szögfelezőre való vetületén. Hasonlóan  $FE$  átmegy  $C_2$ -n.



**II. megoldás.** A szögfelezők átmennek  $k$  középpontján,  $O$ -n, így a  $CO$  szakasz  $C_1$ -ből és  $C_2$ -ből derékszögben látszik, tehát  $C_1$  és  $C_2$  a  $CO$  szakasz fölötti  $k_1$  Thalész-kör pontjai (2. ábra). Másrészt az érintés miatt  $E$  is a  $k_1$ -en van, így az összehasonlítandó szakaszok a  $k_1$  kör húrjai. Az állítást avval bizonyítjuk, hogy  $k_1$ -ben a két húrhoz egyenlő, ill. egymást  $180^\circ$ -ra kiegészítő kerületi szögek tartoznak.

$C_1OC_2 \triangleleft$  az  $AOB \triangleleft$  csúcshöge, vagy  $180^\circ$ -ra kiegészítő szöge (belátható volna, hogy mindig az előbbi). A háromszög szögeinek szokásos jelölésével

$$AOB \triangleleft = 180^\circ - (OAB \triangleleft + OBA \triangleleft) = 180^\circ - \frac{\alpha + \beta}{2} = 90^\circ + \frac{\gamma}{2}.$$

Másrészt  $CO$  felezi a  $\gamma$  szöget, és így a  $CEO$  derékszögű háromszögből

$$COE \triangleleft = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}.$$

Így  $C_1C_2$ -nek és  $CE$ -nek a  $k_1$  kör  $O$  pontjából vett látószöge valóban vagy egyenlő vagy egymást kiegészítő szöge. Ezt akartuk bizonyítani.