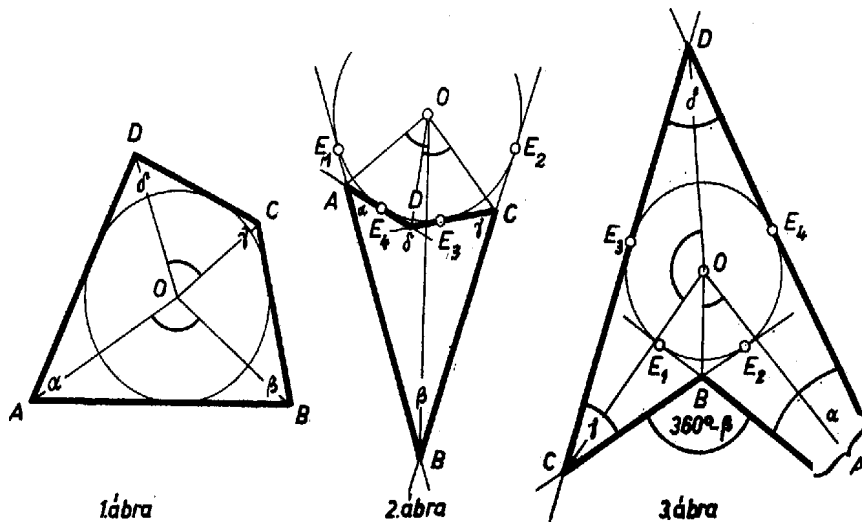


I. Ha a négyszög mindnégy oldalegyenesének a körrel való érintkezési pontja a négyszög oldalszakaszán van, akkor a kör nyilvánvalóan a négyszög belsejében van (1. ábra), és a négyszög belső szögeinek felezői átmennek O -n. Legyen az A, B, C, D csúcsnál levő szög rendre $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Így

$$\begin{aligned} \angle AOB + \angle COD &= 180^\circ - \angle OAB - \angle OBA + (180^\circ - \angle OCD - \angle ODC) = \\ &= 360^\circ - \frac{\alpha + \beta + \gamma + \delta}{2} = 180^\circ, \end{aligned}$$

mert a négyszög szögeinek összege 360° .

Ugyanez az érték adódik hasonló számítással a BOC és DOA szögek összegére is, vagy figyelembe vehetjük azt is, hogy a vizsgálandó négy szög összege 360° , így a másik két szög összege ismét 180° .



II. A második helyzettípushoz természetesen hozzáértjük, hogy a további két oldalegyenes érintési pontja oldalszakaszon van. A kört az oldalszakaszon kívüli pontjában érintő oldalegyenesek kölcsönös helyzetére két lehetőség van: a négyszög megfelelő oldalai szomszédosak (2. és 3. ábra, AB és BC), vagy szemben fekvők (4. ábra, AB és CD).

A 2. ábra esetében A és C a B -ből a körhöz húzható BE_1 , ill. BE_2 érintőszakaszon van, másrészt a D -ből húzható DE_4 , ill. DE_3 érintőszakasznak az érintési ponton túli meghosszabbításán, a négyszög konkáv, D -nél levő szöge nagyobb 180° -nál. Itt az A -ból húzható érintőszakaszok közti, a kört tartalmazó szögtartomány nagysága $180^\circ - \alpha$; hasonlóan

$$\angle E_2CE_3 = 180^\circ - \gamma, \quad \angle E_3DE_4 = 360^\circ - \delta,$$

és az AO, CO, DO félegyenes rendre ezeket a szögeket felezi.

A kérdéses szögek:

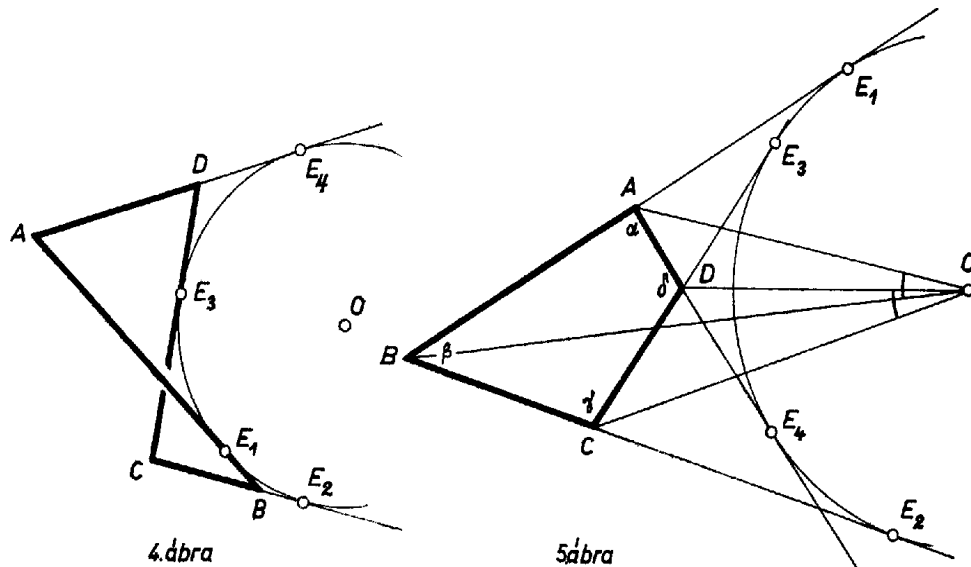
$$\begin{aligned} \angle AOB &= \angle OAE_1 - \angle OBE_1 = \frac{180^\circ - \alpha - \beta}{2}; \\ \angle COD &= 180^\circ - (\angle OCE_3 + \angle ODE_3) = 180^\circ - \left(\frac{180^\circ - \gamma + 360^\circ - \delta}{2} \right) = \\ &= \frac{\gamma + \delta}{2} - 90^\circ, \end{aligned}$$

összegük $\gamma + \delta - 180^\circ$, másképpen $180^\circ - \alpha - \beta$, ugyanis konkáv négyszögre is fennáll $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ$. Továbbá hasonlóan

$$\angle BOC + \angle DOA = 180^\circ - \beta - \gamma = \alpha + \delta - 180^\circ.$$

A 3. ábra csak abban tér el a 2.-tól, hogy B van az AE_1 és CE_2 érintőszakaszon, a négyszög konkáv szöge B -nél van. Így

$$\begin{aligned} \angle AOB + \angle COD &= \left(180^\circ - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} \right) + \left(180^\circ - \frac{\gamma}{2} - \frac{\delta}{2} \right) = \\ &= 180^\circ = \angle BOC + \angle DOA. \end{aligned}$$



A 4. ábrán a feltevés hurkolt négyszöget eredményez. Ezzel az esettel nem foglalkozunk, mert már a négyszög szögeinek értelme is bizonytalanná válik itt.

III. Az utolsó vizsgálandó helyzettípusban, az 5. ábra esetében a kört tartalmazó szögtartomány a B csúcsban maga a β szögtartomány, D -ben a δ szög csúcsszögtartománya, A -ban és C -ben pedig α , ill. γ mellékszögtartománya. Így

$$\begin{aligned} \angle AOB + \angle COD &= (\angle OAE_1 - \angle OBE_1) + (\angle ODE_3 - \angle OCE_3) = \\ &= 180^\circ - \alpha - \beta, \\ \angle BOC + \angle DOA &= (\angle OCE_2 - \angle OBE_2) + (\angle ODE_4 - \angle OAE_4) = \\ &= 180^\circ - \beta - \gamma. \end{aligned}$$

Palla László (Budapest, Piarista g. II. o. t.)

Vízvári Béla (Budapest, Berzsényi D. g. II. o. t.)

Megjegyzés. A feladattal a szerkesztőség arra kívánta ráirányítani az olvasók figyelmét, hogy a helyzet megváltozásával tételek kissé módosulhatnak, másrészt hogy egy négyszög mindegyik oldalegyenesét érintő kör lehet a négyszögön kívül is a háromszög esetéhez hasonlóan.

Az eredményeket egybevetve mondhatjuk, hogy ha a kör a négyszög belsejében van (1. és 3. ábra), akkor a kérdéses összegek egyenlők. Másrészt a 2. és 5. ábra helyzeteiben a két összegre ugyanaz a kifejezés adódott. Ezekben a helyzetekben észre lehetett volna venni az előbbi szép összefüggés helyébe azt, hogy $\angle AOB - \angle COD$ és $\angle BOC - \angle DOA$ különbségek egyenlők, közös értékük 0° , vagyis $\angle AOB = \angle COD$, és $\angle BOC = \angle DOA$. Ennek bizonyítását az olvasóra hagyjuk.

Ajánljuk azt is az olvasóknak, vizsgálják meg a teljesség kedvéért, hogy ábráink feltüntetnek-e minden lehetséges helyzettípust.