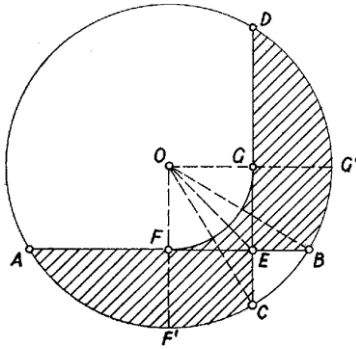


I. megoldás. Legyen a kör középpontja O sugara r , a húr kezdő helyzetének végpontjai A, B , felezőpontja F ; fordulás közben A a rövidebb AB íven haladjon, A, B és F végső helyzete C, D, G . Így C még a rövidebb AB íven van, mert $\angle AOB < 120^\circ$ és $\angle AOC < 90^\circ$; legyen AB és CD metszéspontja E .



A mozgó húrnak O -hoz legközelebbi pontja F , legtávolabbiak A és B , minden az $OF = r/2$ és $OA = r$ közötti távolságban van pontja a húrnak (O -tól mérve), így a húr azt a területet sűrolja, amelyet a hosszabb AD ív, az AF, GD szakaszok és az FG negyedkörív határol, kivéve a BC ív és az EB, EC szakaszok határolta területet. Meghúzva még az AB -t és CD -t felező OF', OG' sugarakat, a mondott terület az AFF' és DGG' fél-szeletek és az $FGG'F'$ körgyűrű-negyed összegének és a BCE idomnak a különbsége.

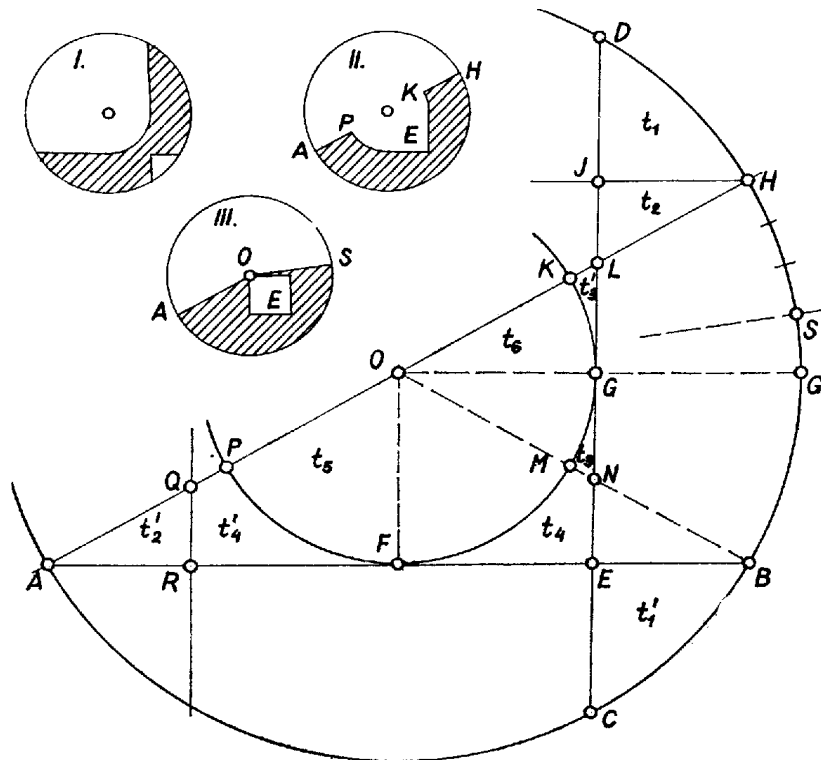
A fél-szeletek együttes területe az $AF'B$ szelet területével egyenlő, ami az OAB körcikk és az OAB háromszög területének különbsége, a BCE idom területét pedig a BCO körcikkből a BOE háromszög területe 2-szeresének kivonásával kapjuk, ugyanis a sűrolt idom nyilvánvalóan szimmetrikus az OE tengelyre. Mivel $\angle BOC < 30^\circ$, és $BF = r\sqrt{3}/2$, ezért a mondott részek és a teljes t terület:

$$ABF' = \frac{r^2\pi}{3} - \frac{r^2\sqrt{3}}{4}, \quad FF'G'G = \frac{\pi}{4} \left(r^2 - \frac{r^2}{4} \right) = \frac{3\pi r^2}{16},$$

$$BEC = \frac{r^2\pi}{12} - BE \cdot OF = \frac{r^2\pi}{12} - \frac{r^2}{4}(\sqrt{3} - 1),$$

$$t = r^2 \cdot \frac{7\pi - 4}{16} \approx r^2 \cdot 1,124.$$

Höss Rozália (Makó, József A. g. III. o. t.)



II. megoldás (vázlat). Fenti ábránkat kiegészítve az AH átmérővel, AB -nek és CD -nek O -ra való tükröképével és az O körüli OF sugarú körrel, majd az ábrán t_i -vel jelölt idomokat a t'_i helyzetbe áthelyezve ($i = 1, 2, 3, 4$) látjuk,

hogy a sűrűlt idom területe egyenlő az $APFEGKHCA$ vonallal határolt idomával. Az utóbbit úgy kapjuk, hogy a nagy kör feléből elvesszük a kis kör negyedrészt (6-od és 12-edrészenek összegét) és az $r/2$ oldalú négyzetet:

$$t = \frac{r^2\pi}{2} - \frac{r^2\pi}{4 \cdot 4} - \frac{r^2}{4}.$$

További meggondolás mutatja, hogy a kérdéses terület egyenlő az OAS körcikk és az $OFEG$ négyzet területeinek különbségével, ahol S a $G'H$ ív első negyedelő pontja. Ugyanis az OGK körcikk területénél az OPF körcikké 2-szer, $OG'H$ -é 4-szer nagyobb, a $KGG'H$ körgyűrű-cikk területe pedig 3-szor, így az átdarabolással nyert idomhoz hozzávéve az OPF körcikket, el kell vennünk a gyűrű-cikk $2/3$ részét. A maradék $1/3$ rész egyenlő területű az OGK körcikkkel, ezért – helyette r sugarú körcikket véve, annak íve $KG/2 = G'H/4 = G'S$ lesz.

Vigassy Lajos