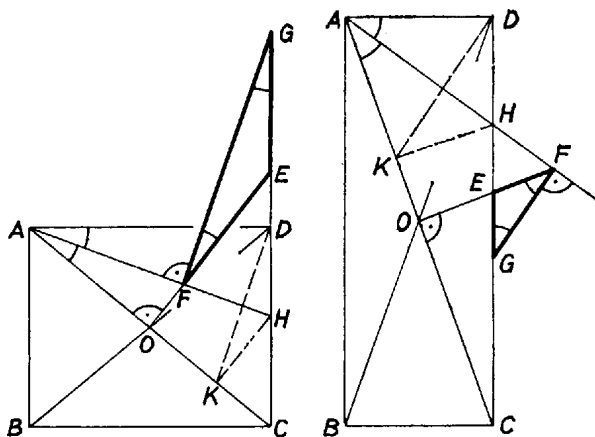


I. megoldás. a) Az E, F, G pontok szerkesztésekor keletkező merőleges szárú szögek, ill. a szögfelezés révén következik – amennyiben megmutatjuk, hogy a fellépő szögek hegyesszögek –, hogy

$$\angle EGF = \angle DAF = \angle FAC = \angle GFE,$$

s így az EFG háromszög egyenlő szárú.



A négy szög közül a középső kettő hegyesszög fele, s így hegyesszög. A másik kettő hegyesszög voltaához azt mutatjuk meg, hogy FEG tompaszög, éspedig az OCE derékszögű háromszög OEC hegyesszögének kiegészítő szöge. Jelöljük AF és CD metszéspontját H -val. Ha F az ACD háromszögben van, akkor OFH és CHF tompaszög, mert mindkettő hegyesszög mellékszöge, így E a CH egyenes H -n túli és OF -nek az F -en túli meghosszabbításán van. Ugyancsak CHF tompaszög volta miatt, és mert GF merőleges AH -ra, G is a CH H -n túli meghosszabbításán van. Mivel $\angle GFH = 90^\circ$, és $\angle EFH$, mint $\angle AFO$ csúcsharmonikus szöge, hegyesszög, így FE a GFH derékszögű szögtartományban halad, tehát a C, H, E, G pontok ebben a sorrendben következnek, FEG tehát az FEC mellékszöge.

Ha F az ACD háromszögon kívül, tehát AH -nak a H -n túli meghosszabbításán van, akkor az ACH háromszög AC oldalszakaszát és az AH oldal meghosszabbítását metsző OF egyenes metszi a CH oldalszakaszt. Másrészt $\angle CHF = \angle DHA$ hegyesszög, így az AF -re állított FG merőleges is a H -ból C felé menő félegyenest metszi, és mivel $\angle AFO$ hegyesszög, $FE (= FO)$ a derékszögű AFG szögtartományban halad. Így E most is G és H közt van, tehát FEG a CEO szög mellékszöge. Ezzel a bizonyítást befejeztük.

b) Ha F egybeesik E -vel, akkor $AF = AE = EC$, s így $\angle DAE = \angle CAE = \angle ACE$; másrészt e három szög összege 90° , így mindegyik 30° -os és $\angle DAC = 60^\circ$. Ebben az esetben az EFG elfajul ponttá.

Szabados Katalin (Budapest, Berzsenyi D. g. I. o. t.)

II. megoldás. a) Jelöljük AF és CD metszéspontját H -val, H -ból az AC -re bocsátott merőleges talppontját K -val. Ekkor DHK egyenlő szárú háromszög, mert H , mint a szögfelező pontja, egyenlő távolságra van a szög két szárától: $HD = HK$. Ekkor $ADHK$ deltoid, AH és KD átlói merőlegesek. Így $HK \parallel EF$, $KD \parallel FG$ (merőlegesek AC -re, ill. AF -re) és $DH \parallel GE$ (egy egyenesen vannak). Az EFG oldalai tehát párhuzamosak a HKD megfelelő oldalaival, s így a két háromszög hasonló, tehát az EFG is egyenlő szárú.

b) E és F akkor és csak akkor esik egybe, ha K és O egybeesik. Ekkor KD a BD átló fele, s így $ADHK$ deltoid volta miatt $KD = KA = AD$, tehát ADK szabályos háromszög, $\angle DAC = \angle DAK = 60^\circ$.

Megjegyzés. A b) kérdés tárgyalható számítás útján is Pythagoras tétele és a szögfelezőre vonatkozó osztásaránytétel felhasználásával.

Legyen $CD = a$, $DA = b$, $AC = c$. Az EOC és ADC -ek hasonlóságából $CE = c^2/2a$. Az osztás-arányból $CF = AC \cdot CD / (AD + AC) = ac / (b + c)$. Egyenlőségükből

$$c(b + c) = 2a^2 = 2c^2 - 2b^2 = (2c - 2b)(b + c),$$

így $c = 2b$, ADC egy szabályos háromszög fele, $\angle DAC = 60^\circ$.