

I. A definíció szerint kiszámítva (2) értékét, összevonások és kiemelések után szorzattá alakítható:

$$(4) \quad \begin{aligned} D &= (ae + bg)(cf + dh) - (ce + dg)(af + bh) = \\ &= adeh + bcfg - adfg - bceh = ad(eh - fg) + bc(fg - eh) = \\ &= (ad - bc)(eh - fg), \end{aligned}$$

$$(5) \quad D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} e & f \\ g & h \end{vmatrix}.$$

II. Ez az előállítás nyilvánvalóan nem az egyetlen lehetséges, hiszen a szorzat kommutatív volta miatt már maga (1) is többféleképpen írható másodrendű determináns alakjában, pl.:

$$(6) \quad ad - bc = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d & b \\ c & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d & c \\ b & a \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix},$$

amint az könnyen ellenőrizhető.

Az (5) alatti második tényezőt tükrözve a jobbra lejtő átlóra, az ún. főátlóra

$$(7) \quad D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} e & g \\ f & h \end{vmatrix}.$$

A jobb oldalból a (2) első sorának és első oszlopának közös mezején álló elem (az első sor első eleme) úgy keletkezik, hogy mindkét tényező első sorát vesszük, összeszorozzuk az első elemeket, a második elemeket és a szorzatokat összeadjuk. Ezt úgy fogjuk röviden mondani, hogy *komponáljuk* a két determináns első sorát. Hasonlóan a (2) szorzatdetermináns első sorának másik elemét (7) első tényezője első sorának és második tényezője második sorának *kompozíciója* adja. A szorzat második sorát az első tényező második sorának a második tényező első, ill. második sorával való kompozíciója adja.

Ha (2)-t (5)-tel hasonlítjuk össze, azt kapjuk, hogy a szorzat azzal a determinánssal is egyenlő, amelynek egy-egy eleme kiszámításához az első tényezőtől az annyiadik sort és a másodikból az annyiadik oszlopot választjuk ki, ahányadik sorban, illetőleg oszlopban a kiszámítandó elem áll, és ezeket komponáljuk.

Hasonlóan az első tényező oszlopaival a második soraival, vagy mind a két tényezőtől az oszlopokat komponálva is kaphatunk olyan determinánst, aminek értéke a két tényező szorzatával egyenlő.

III. Most már a két tényezőt (6) alapján más determináns alakba írva, majd a szorzat-determinánst sor – sor. ill sor – oszlop kompozícióval képezve

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} h & f \\ g & e \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ah + cf & ag + ce \\ bh + df & bg + de \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} ah + cg & af + ce \\ bh + dg & bf + de \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

A főátló elemeinek szorzatából kivonva a másik átló elemeinek szorzatát – röviden a determináns *kifejtése* útján – mindkét alakból (4)-re jutunk.

IV. A (3) szorzat mindegyik tényezője írható másodrendű determinánssként. Előbb az első, majd a második szorzás eredményét sor – oszlop kompozícióval másodrendű determinánssá alakítva:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a & c \\ d & b \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} k & m \\ n & l \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x & v \\ z & y \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} ak + cn & am + cl \\ dk + bn & dm + bl \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x & v \\ z & y \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} akx + cnx + amz + clz & akv + cnv + amy + cly \\ dkx + bnx + dmz + blz & dkv + bnv + dmy + bly \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Ugyanezt a determinánst kapjuk, ha az első tényezőt a második és a harmadik tényező szorzatával ugyanezen előírás szerint számítjuk. Ha azonban sor–sor szorzást alkalmazunk, akkor a kétféle csoportosítás már más-más alakban adja a szorzatot.

V. Más elgondolás alapján is átírhatjuk (3)-at. Jelöljük a 2. és a 3. tényező értékét K -val, ill. X -szel.

$$(8) \quad \begin{aligned} KX &= K \begin{vmatrix} x & z \\ v & y \end{vmatrix} = K(xy - zv) = (Kx)y - (Kz)v = \begin{vmatrix} Kx & Kz \\ v & y \end{vmatrix}, \\ &= (Kx)y - (Kv)z = \begin{vmatrix} Kx & z \\ Kv & y \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Eszerint egy másodrendű determinánsnak – itt X -nek – egy K számmal való szorzata egyenlő egy olyan másodrendű determinánssal, melynek egyik sora vagy oszlopa X megfelelő sorának, ill. oszlopának a K -szorosa, a másik sora, ill. oszlopa pedig megegyezik X megfelelő sorával, ill. oszlopával.

Eszerint a (3) kifejezés is többféleképpen írható másodrendű determináns alakban, pl. (7) és (8) felhasználásával így:

$$\begin{vmatrix} a & c \\ d & b \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} Kx & z \\ Kv & y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Kax + Kcv & Kdx + Kbv \\ az + cy & dz + by \end{vmatrix}.$$

Két más lehetséges alak a sok közül a következő:

$$\begin{vmatrix} a & c \\ d & b \end{vmatrix} \cdot K \cdot X = \begin{vmatrix} Xa & Xc \\ Kd & Kb \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} KXa & Xc \\ Kd & b \end{vmatrix}.$$

Bulkai Tamás (Győr, Benedek-rendi Czuczor G. g. I. o. t.)

Kósa Márton (Budapest, Kandó K. hír. ip. t. II. o. t.)

Kövesdi Gyula (Budapest, Bem J. g. III. o. t.)