

Legyen $\overline{ABCDE} = x^2$, és $\overline{EB CDA} = y^2$, ahol $A < E$, így $x < y$. Az első egyenlőséget a másodikból kivonva

$$(1) \quad (10^4 - 1)(E - A) = 3^2 \cdot 11 \cdot 101(E - A) = (y - x)(y + x).$$

E és A négyzetvégződésesek, és $A > 0$, így értékük 1, 4, 5, 6 és 9 közül kerül ki, tehát $E - A$ értéke az 1, 2, 3, 4, 5 és 8 számok valamelyike.

Másrészt x és y kisebb a legkisebb 6-jegyű szám, és nagyobb a legkisebb 5-jegyű szám négyzetgyökénél: $100 < x < y \leq 316$, így $y + x \leq 631$, $y - x \leq 215$.

(1) jobb oldala többszöröse 101-nek, ezért vagy $y + x$ többszöröse neki, legfeljebb a 6-szorosa, vagy $y - x = 101k$, ahol $k = 1$ vagy 2.

Válasszuk meg az eddigi korlátozások között $E - A$ értékét, bontsuk fel (1) bal oldalát két tényezőre, a kisebbet $y - x$ -szel, a nagyobbat $y + x$ -szel egyenlővé téve számítsuk ki x -et és y -t, és vizsgáljuk meg minden esetben, eleget tesznek-e az összes követelményeknek. x a két tényező (pozitív) különbségének a fele, csak akkor 3-jegyű, ha a különbség legalább 200.

$E - A = 1$ esetén a bal oldal szóba jövő felbontásai: $99 \cdot 101$ és $33 \cdot 303$, amiből $x = 1$, ill. $x = 135$, az utóbbi sem felel meg, mert négyzetében nem minden jegy különböző.

Nem lehet $E - A = 2$, mert különben $y - x$ és $y + x$ egyike páros, másika páratlan, és így x , y nem egészek.

$E - A = 3$ esetén (1) bal oldala $297 \cdot 101 = 99 \cdot 303$. Elég az utóbbit vizsgálni, de az adódó $x^2 = 102^2$ -ben két 0-jegy lép fel.

$E - A = 4$ esetére mindkét tényezőnek párosnak kell lennie, így az $E - A = 1$ eset eredményeinek 2-szereseit kapjuk, azonban $x = 270$ nem felel meg, mert négyzete két egyenlő jegyre végződik.

$E - A = 5$ esetén $495 \cdot 101$ -ből $x^2 = 197^2 = 38\,809$, nem felel meg; $505 \cdot 99$ -ből $x = 203$, $y = 302$, négyzetük 41 209, ill. 91 204, megfelelnek.

Végül $E - A = 8$ csak $E = 9$, $A = 1$ -ből adódhat, így $y \geq 301$ és $x \leq 141$, ezért $y - x \geq 160$, és (1) bal oldala tényezői különbségének legalább 320-nak kell lennie. Egyetlen ilyen felbontása $606 \cdot 132$, de innen y^2 hatjegyűnek adódik.

Más lehetőség nincs, így csak 41 209 és 91 204 felelnek meg.

Tolnay-Knefely Tibor (Budapest, Bláthy O. vill. ip. t. II. o. t.)