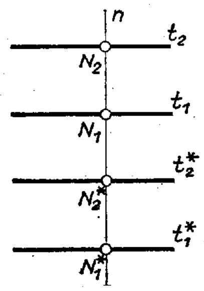
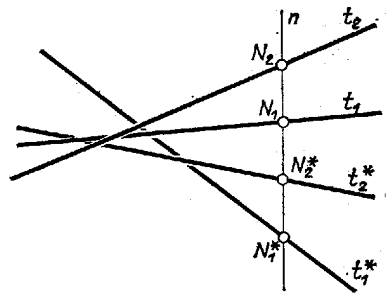
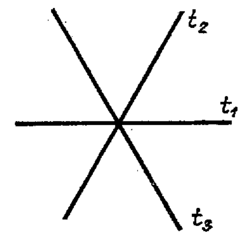
I. Ha egy idomnak t_1 és t_2 szimmetriatengelye, akkor t_2-nek t_1-re vonatkozó t_2^* tükörképe is szimmetriatengelye, hiszen szimmetriatengelye a t_1-re vonatkozó tükörképnek, de ez azonos az eredeti idommal, mert t_1 szimmetriatengely.

II. A feladat feltételei mellett a tengelyek páronként metszik egymást. Valóban, ha volna két párhuzamos vagy két kitérő tengely, t_1 és t_2, akkor messe ezeket egy rájuk merőleges egyenes, ill. normáltranzverzálisuk, n az N_1 és N_2 pontban ($a-b$ ábra). Ekkor t_2-nek t_1-re vonatkozó t_2^* tükörképe metszi n-et N_2-nek N_1-re vonatkozó N_2^* tükörképében, tehát N_1 nek az N_2-t nem tartalmazó oldalán. Hasonlóan t_1-nek t_2^*-ra vonatkozó t_1^* tükörképe n-t az N_1-nek N_2^*-ra vonatkozó N_1^* tükörképében metszi, tehát N_2^*-nak az N_1-et és N_2-t nem tartalmazó oldalán. Így t_1, t_2, t_1^*, t_2^* négy különböző egyenes, és I. szerint mind szimmetriatengelye volna az idomnak, holott a feltétel szerint annak csak 3 szimmetriatengelye van. (Az eljárás ismétlése végtelen sok szimmetriatengelyt szolgáltatna.)







III. A 3 tengely nem lehet páronként merőleges, mert ha pl. t_1 és t_2 merőleges t_3-ra, akkor vagy párhuzamosak, vagy kitérők, de éppen beláttuk, hogy ez lehetetlen. Legyen t_1 és t_2 szöge $90°$-tól különböző. Ekkor t_2-nek t_1-re vonatkozó tükörképe különbözik mindkettőjüktől, tehát csak t_3 lehet. Így t_3 is átmegy t_1 és t_2 metszéspontján; t_1-nek t_3-ra vonatkozó tükörképe pedig újra t_2 (c ábra). Ez azt jelenti, hogy t_2-t a $(t_2t_1)\sphericalangle$-gel háromszor ugyanabban az irányban elforgatva sorra t_1-re, t_3 -ra, majd újra t_2-re kerül. Ez a szög tehát $60°$ vagy $120°$, de a két tengely közti kisebb szög az utóbbi esetben is $60°$, és ez egyben bármelyik két tengely kisebbik szöge. Ezzel a feladat állítását bebizonyítottuk.

Tuba Mária (Gyömrő, Ált. g. I. o. t.) dolgozata, kiegészítéssel