

I. A PQD és PAB , továbbá a PQR és PAM hasonló háromszögpárok megfelelő oldalainak aránya egyenlő, így

$$\frac{MR}{AB} = \frac{DQ}{AB} = \frac{QP}{AP} = \frac{RP}{MP} = \frac{MR - MP}{MP} = \frac{MR}{MP} - 1,$$

és így MR -rel osztva

$$(1) \quad \frac{1}{AB} = \frac{1}{MP} - \frac{1}{MR}.$$

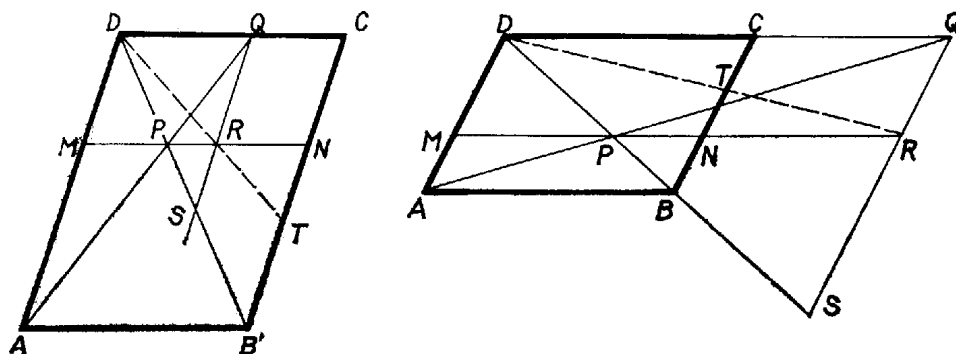
A PQS , PAD és PQR , PAM hasonló háromszög-párok megfelelő oldalainak aránya egyenlő, így

$$\frac{BC}{QS} = \frac{AD}{QS} = \frac{AP}{QP} = \frac{AM}{QR} = \frac{AD - DM}{QR} = \frac{BC - QR}{QR} = \frac{BC}{QR} - 1.$$

Innen BC -vel osztva és rendezve

$$(2) \quad \frac{1}{BC} = \frac{1}{QR} - \frac{1}{QS}.$$

(1) és (2) az előírt szakasz-hármasok közti egyszerű összefüggések. Ha M az AD oldal belső pontja, az ábra létrejön, (1) és (2) érvényesek; $M = A$ esetén már Q sem jön létre, $M = D$ esetén pedig M , D , P , Q , R , S egybeesik.



II. A B , C , Q , N pontokból megszerkeszthető R is, így (2)-ből meghatározható QS :

$$\frac{1}{QS} = \frac{1}{QR} - \frac{1}{BC} = \frac{BC - QR}{QR \cdot BC} = \frac{BC - CN}{QR \cdot BC} = \frac{BN}{QR \cdot BC}, \quad \frac{QR}{QS} = \frac{BN}{BC}.$$

Messe DR a BC egyenest T -ben, ekkor $QR/QS = CT/CB$, tehát $CT = BN$. Ennek alapján a következő szerkesztés látszik célravezetőnek.

Legyen T az N pont tükörképe a BC szakasz középpontjára, továbbá RT és CQ metszéspontja D , a B -n át CD -vel és D -n át BC -vel párhuzamosan húzott egyenesek metszéspontja A .

Be kell látnunk, hogy az $ABCD$ paralelogrammából és az $MN = NR$ egyenesből kiindulva az adott Q ponthoz jutunk. Tegyük fel, hogy a Q' , R' , S' pontok adódnak, továbbá jelöljük BD és QR metszéspontját S -sel. Ekkor egyrészt szerkesztés szerint teljesül

$$\frac{QR}{QS} = \frac{CT}{CB} = \frac{BN}{CB} = \frac{BC - QR}{CB},$$

tehát teljesül (2), másrészt teljesül

$$\frac{1}{BC} = \frac{1}{Q'R'} - \frac{1}{Q'S'}.$$

Mivel $Q'R' = QR$, így $Q'S' = QS$, de ez csak úgy lehet, ha $Q = Q'$, mert BD és CD nem párhuzamos.

D mindig létrejön, kivéve, ha N a BC szakasz felezőpontja.

Szeidl László (Budapest, Apáczai Csere J. gyak. g. III. o. t.)

Megjegyzés: Belátható az is, hogy MB és QS metszéspontja a Q pont R -re vonatkozó tükörképe, ami szintén módot ad a szerkesztésre.