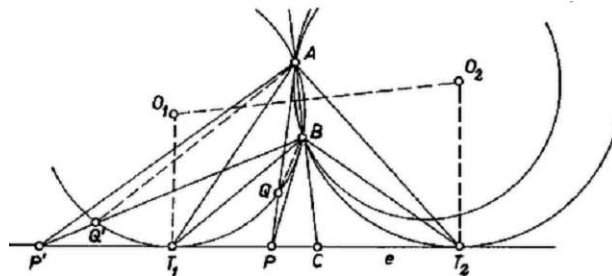


Legyen az adott egyenes e , a két adott pont A és B , az AB metszéspontja e -vel – ha nem párhuzamosak – legyen C , és ez esetben válasszuk a betűzést úgy, hogy B fektüdjön A és C között. Az AB szakasz látószöge C -ből 0° , az e egyenes minden más P pontjából ennél nagyobb. A P -ből vett látószög egyben az ABP háromszög köré írt kör P -t nem tartalmazó AB ívén nyugvó kerületi szög is. Ez az ív a kör sugarának csökkenésével növekszik, így várható, hogy egy az A -n és B -n átmenő, e -t érintő kör érintési pontjára lesz a legnagyobb.



A -n és B -n át két e -t érintő kör húzható, kivéve, ha AB párhuzamos e -vel. Ha T ezek valamelyikének az érintési pontja e -n, akkor a kör C -ből húzott szelőjére és érintőjére fennáll $CT^2 = CA \cdot CB$. Ez az érték A -val és B -vel egyértelműen meg van határozva, így a két érintési pontot a C körül $\sqrt{CA \cdot CB}$ sugárral rajzolt kör metszi ki e -ből.

Megmutatjuk, hogy a CT_1 félegyenes minden C -től és T_1 -től különböző P pontjából kisebb szög alatt látszik AB , mint T_1 -ből. Ha P a CT_1 szakaszon van, akkor a CAT_1 szögtartományban fekszik, a körön kívül, így az AP szakasz metszi a kör A -t nem tartalmazó T_1B ívét egy Q pontban. A BPQ háromszög belső és külső szögére

$$\angle APB < \angle QPB < \angle AQB = \angle AT_1B.$$

Ha P' a T_1 -en túli meghosszabbításon van, akkor az ABT_1 szögtartományban és a körön kívül van, így a $P'B$ szakasz metszi a B -t nem tartalmazó AT_1 ívet egy Q' pontban, és az $AP'Q'$ háromszögből

$$\angle AP'B < \angle AP'Q' < \angle AQ'B = \angle AT_1B.$$

A CT_1 félegyenesen tehát a T_1 pontból legnagyobb a látószög, és ugyanígy a CT_2 félegyenesen a T_2 pontból. Hasonlóan látható, hogy ha $AB \parallel e$, akkor e minden más pontjából kisebb AB látószöge, mint a T érintési pontból. (Ennek részletezését az olvasóra bízuk.)

Ha $AB \perp e$, akkor a két érintő kör egymás tükörképe AB -re, így T_1 -ből is, T_2 -ből is a látószög a lehető legnagyobb.

Ha pl. ACT_1 hegyes szög, akkor AB felező merőlegesének a T_1 -ben e -re emelt merőlegessel való O_1 metszéspontja közelebb van e -hez, mint a T_2 -ben emelt merőlegessel való O_2 metszéspontja. Így a T_1 -ben érintő kör sugara, O_1T_1 , kisebb, mint a T_2 -ben érintő kör O_2T_2 sugara. Ebből következik, hogy az előbbi kör T_1 -et tartalmazó AB ívének az AB egyenesre vonatkozó tükörképe annak a tartománynak a belsejében lesz, amit az AB szakasz és a T_2 -ben érintő kör T_2 -t tartalmazó AB íve határol. Ekkor azonban az előbbi körívről, s így T_1 -ből is nagyobb szögben látszik AB , mint az utóbbról, tehát nagyobb szögben, mint T_2 -ből. Ebben az esetben tehát T_1 a keresett pont. Ha AB párhuzamos e -vel, akkor, mint említettük, az A -n és B -n átmenő és e -t érintő (egyetlen) kör érintési pontjából látszik legnagyobb szög alatt AB .

Berkes Zoltán (Budapest, Bolyai J. g. I. o. t.)