

I. Legyen a kérdéses aránypár

$$x : y = z : v, \quad \text{azaz} \quad (1) xv = yz,$$

így az adatok szerint fennállanak a következő további egyenletek:

$$(2) \quad x + v = y + z + a,$$

$$(3) \quad x^2 + v^2 = y^2 + z^2 + b,$$

$$(4) \quad x^4 + v^4 = y^4 + z^4 + c.$$

Emeljük négyzetre a (2) egyenletet, és vonjuk ki a kapott egyenletből (1) kétszeresét, valamint (3)-at

$$0 = 2a(y + z) + a^2 - b.$$

Emeljük négyzetre (3)-at, és vonjuk ki belőle (1) négyzetének kétszeresét, valamint (4)-et

$$0 = 2b(y^2 + z^2) + b^2 - c.$$

Így könnyen megoldható típusú kétismeretlenes egyenletrendszert kaptunk a két belső tagra. A jobb oldalakat egy-egy betűvel jelölve

$$(5) \quad y + z = \frac{b - a^2}{2a} = d,$$

$$(6) \quad y^2 + z^2 = \frac{c - b^2}{2b} = e,$$

feltéve, hogy $a \neq 0$, és $b \neq 0$, egyelőre erre az esetre szorítkozunk. Vonjuk ki (5) négyzetéből (6)-ot; osztással

$$(7) \quad yz = \frac{d^2 - e}{2} = f.$$

(5) és (7) alapján y és z a következő egyenlet gyökei:

$$(8) \quad \begin{aligned} u^2 - du + f &= 0, \quad \text{azaz} \\ y, z &= u_{1,2} = \frac{1}{2}(d \pm \sqrt{d^2 - 4f}). \end{aligned}$$

Az előzők felhasználásával x és v így határozható meg:

(5) és (2) alapján

$$x + v = d + a = \frac{b + a^2}{2a} = g,$$

másrészt (1) és (7) alapján

$$xv = f,$$

ennélfogva (8)-hoz hasonlóan

$$(9) \quad x, v = \frac{1}{2}(g \pm \sqrt{g^2 - 4f}).$$

(8) eredményünk úgy értendő, hogy az u -ra vonatkozó egyenlet egyik gyökét y -nak, másikat z -nek vesszük. A megválasztás kétféleképpen lehetséges, nem kapunk azonban lényegesen különböző megoldást y és z felcserélésével, hiszen eljárásunk csupán az aránypár ismert felcserélési lehetőségeinek alkalmazását jelentené. Ugyanezek állnak (9)-re is; x és v megválasztása független y és z megválasztásától, így általában 4 nem lényegesen különböző megoldása van az (1)–(4) egyenletrendszernek.

Az eredeti paraméterekkel kifejezve a két diszkrimináns:

$$\begin{aligned} D_1 &= d^2 - 4f = 2e - d^2 = \frac{c}{b} - b - \left(\frac{b - a^2}{2a}\right)^2, \\ D_2 &= g^2 - 4f = (d + a)^2 - 4f = 2e - d^2 + b = D_1 + b, \end{aligned}$$

ennélfogva

$$\begin{aligned} y, z &= \frac{1}{2} \left(\frac{b - a^2}{2a} \pm \sqrt{\frac{c}{b} - b - \left(\frac{b - a^2}{2a}\right)^2} \right), \\ x, v &= \frac{1}{2} \left(\frac{b + a^2}{2a} \pm \sqrt{\frac{c}{b} - \left(\frac{b - a^2}{2a}\right)^2} \right). \end{aligned}$$

y és z , ill. x és v valósak, ha $D_1 \geq 0$, ill. $D_2 \geq 0$. Ha D_1 , vagy D_2 0-val egyenlő, és a másikuk pozitív, akkor a két belső, ill. a két külső tag egyenlő és mértani középarányos a további két tag között. $D_1 = D_2 = 0$ a fentiek szerint csak $b = 0$ esetén lenne lehetséges, ezt az esetet eddigi számításunkban kizártuk.

A kizárt $a = 0$ esetben (1)-ből és (2)-ből adódik, hogy az x , v számpár tagjai valamelyik sorrendben megegyeznek y -nal, z -vel, így (3) és (4) csak $b = 0$, ill. $c = 0$ mellett állhat fenn, a paraméterek nem függetlenek egymástól.

$b = 0$ esetén hasonlóan adódik $c = 0$ (itt (1) négyzetét használjuk), viszont (3)-hoz (1) kétszeresét hozzáadva

$$(x + v)^2 = (y + z)^2, \quad x + v = \pm(y + z),$$

tehát vagy $a = 0$, vagy $a = 2(x + v)$. (Fordítva $c = 0$ -ból hasonlóan adódik $b = 0$, a másik eset – ti. $x^2 + v^2 = -(y^2 + z^2)$ lehetetlen.)

II. Az $a = 7$, $b = 21$, $c = 2625$ paraméter-hármas esetében $d = -2$, $e = 52$, $f = -24$, $g = 5$, $D_1 = 10^2$, $D_2 = 11^2$, így y és z egyike -6 , másika 4 , továbbá x és v egyike -3 , másika 8 . A 4 aránypár egyike:

$$(-3) : (-6) = 4 : 8.$$

Szalay Mihály (Budapest, Vörösmarty M. g., III. o. t.)