

I. megoldás. Alakítsuk az (1) kifejezést az alábbiak szerint:

$$\begin{aligned} & (a^2 - 2ab + b^2) + (c^2 - 2cd + d^2) + 3(ab + cd) + \\ & + (ac + bd) + (ad + bc) = (a - b)^2 + (c - d)^2 + \\ & + 3 \left(ab + \frac{1}{ab} \right) + \left(ac + \frac{1}{ac} \right) + \left(ad + \frac{1}{ad} \right). \end{aligned}$$

Az utolsó három zárójelben felhasználtuk, hogy a feltevés szerint $abcd = 1$, így a második tag mindig az elsőnek a reciprokával helyettesíthető.

Az utolsó három zárójeles kifejezés mindegyike $e + 1/e$ alakú, ahol e pozitív szám. Megmutatjuk, hogy egy pozitív számhoz az ilyen összeg értéke legalább 2. Valóban

$$e + \frac{1}{e} - 2 = \frac{e^2 - 2e + 1}{e} = \frac{(e - 1)^2}{e} \geq 0,$$

ha $e > 0$, és egyenlőség csak az $e = 1$ esetben áll fenn. Ebből az állítás következik, hiszen így az utolsó három tag összege legalább $6 + 2 + 2 = 10$, az első két tag pedig nem negatív.

Ha $a = b$, $c = d$, $ab = ac = ad = 1$, akkor mindenütt egyenlőség áll, S értéke pedig 10, más esetben a „ $>$ ” jel érvényes. A feltételekből $a^2 = 1$, és $a > 0$ folytán $a = 1 = b = c = d$.

Bóta Károly (Budapest, Fazekas M. Gyak. G. II. o. t.)

II. megoldás. Ha az a, b, c, d számok nem mindegyike 1, akkor van köztük 1-nél kisebb és 1-nél nagyobb. Mivel a négy számot bármilyen más sorrendben véve S -ben csak a tagok sorrendje változik meg, S értéke nem, így feltehetjük, hogy

$$(2) \quad a > 1 > b.$$

Változtassuk a számainkat úgy, hogy szorzatuk ne változzék, de a helyett $a' = 1$ -et írunk. Legyen $b' = ab$, $c' = c$, $d' = d$. Ekkor

$$S' = 1^2 + (ab)^2 + c^2 + d^2 + 1 \cdot ab + 1 \cdot c + 1 \cdot d + ab \cdot c + ab \cdot d + cd.$$

Ezt S -ből levonva

$$\begin{aligned} S - S' &= a^2 + b^2 - 1 - a^2b^2 + ac + ad + bc + bd - c - d - abc - abd = \\ &= (a^2 - 1)(1 - b^2) + (c + d)(a + b - 1 - ab) = \\ &= (a - 1)(1 - b)[(a + 1)(1 + b) + c + d]. \end{aligned}$$

Itt az első két tényező a (2) feltétel folytán, a harmadik pedig számaink pozitív volta miatt pozitív, tehát pozitív a különbség is, azaz $S > S'$.

Ha az a', b', c', d' számok közt van különböző, akkor az eljárást ismételhetjük. Véges sok (legfeljebb 3) lépés után S^* értékhez jutunk, amelyben $a^* = b^* = c^* = d^* = 1$, $S^* = 10$. Így $S \geq S^* = 10$, és egyenlőség csak akkor áll, ha $a = b = c = d = 1$.

Major Péter (Budapest, Fazekas M. Gyak. G. II. o. t.)

III. megoldás. Megoldásunkat arra alapítjuk, hogy négy pozitív szám számtani közepe, $(a + b + c + d)/4$ nem kisebb mértani középüknél, $\sqrt[4]{abcd}$ -nél. Ezt a megoldás végén igazoljuk. Esetünkben ez a következő egyenlőtlenséget adja:

$$a + b + c + d \geq 4.$$

Ezt négyzetre emelve, majd 2-vel osztva

$$(4) \quad \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} + \frac{c^2}{2} + \frac{d^2}{2} + ab + ac + ad + bc + bd + cd \geq 8.$$

Alkalmazzuk a szóban forgó egyenlőtlenséget a bal oldal első négy tagjára, és vegyük figyelembe a feltevést:

$$\frac{1}{4} \left(\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} + \frac{c^2}{2} + \frac{d^2}{2} \right) \geq \sqrt[4]{\frac{a^2b^2c^2d^2}{16}} = \frac{1}{2} \sqrt{abcd} = \frac{1}{2}.$$

Ennek 4-szeresét (4)-hez hozzáadva a bizonyítandó állítást kapjuk: $S \geq 10$.

A felhasznált egyenlőtlenséget a két pozitív számra vonatkozó megfelelő $(u+v)/2 \geq \sqrt{uv}$ egyenlőtlenségből könnyen kaphatjuk (ami helyes, mert $(u+v)/2 - \sqrt{uv} = (u+v-2\sqrt{uv})/2 = (\sqrt{u}-\sqrt{v})^2/2 \geq 0$). Alkalmazzuk ezt az egyenlőtlenséget az $(a+b+c+d)/4$ kifejezésben előbb külön-külön az a, b és a c, d számpárra, majd a $\sqrt{ab}$, $\sqrt{cd}$ számpárra. Így

$$\frac{a+b+c+d}{4} = \frac{1}{2} \left(\frac{a+b}{2} + \frac{c+d}{2} \right) \geq \frac{\sqrt{ab} + \sqrt{cd}}{2} \geq \sqrt{\sqrt{ab} \cdot \sqrt{cd}} = \sqrt[4]{abcd},$$

és ezt akartuk igazolni.

Bod Judit (Budapest, Apáczai Csere J. Gyak. G. I. o. t.)

Megjegyzés. Akárhány pozitív számra is fennáll a fentihez hasonló egyenlőtlenség¹

$$\frac{c_1 + c_2 + \dots + c_n}{n} \geq \sqrt[n]{c_1 c_2 \dots c_n}.$$

Ezt alkalmazva az S összeg 10 tagjára, azt kapjuk, hogy

$$\frac{S}{10} \geq \sqrt[10]{a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 \cdot d^2 \cdot ab \cdot ac \cdot ad \cdot bc \cdot bd \cdot cd} = \sqrt[10]{a^5 b^5 c^5 d^5} = 1,$$

vagyis $S \geq 10$, és ezt kellett bizonyítani.

Balogh Kálmán (Budapest, Fazekas M. Gyak. G., I. o. t.)

¹Lásd pl. *Kürschák J.–Hajós Gy.–Neukomm Gy.–Surányi J.*: Matematikai Versenytételek I. (Tankönyvkiadó, Budapest, 1955) 111. o.