

I. megoldás. Tekintsük az abroncsok állapotát pl. 1000 km megtétele után. A hátsó abroncsok $11/5$ részükben, az első $1/25$ részükben koptak el. (Feltesszük, hogy a gépkocsi állandóan átlagos minőségű úton jár, a kopás egyenesen arányos a megtett úttal.) Ha most megcseréljük az abroncsokat, akkor újabb 1000 km megtétele után a négy abroncs egyenlő utat futott be és egyformán $1/15 + 1/25 = 8/75$ részben tekinthető kopottnak. Az abroncsok annyszor többet futhatnak 2000 km-nél, ahányszor nagyobb a teljes elkopáshoz tartozó arányszám, azaz 1, az eddig bekövetkezett $8/75$ kopási arányszámnál. Eszerint a gépkocsi $2000 \cdot 75/8 = 18\,750$ km utat tehet meg az abroncsok elkopásáig, ennek felét az eredeti elrendezésben, másik felét felcserélt abroncsokkal.

Jereb László (Sopron, Széchenyi I. Gimn. II. o. t.)

Megjegyzés. Hasonlóan látható be, hogy ha az egyik keréken a km úton kopik el egy abroncs, a másikon b km után, akkor a fenti cserével

$$\frac{1}{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)}$$

utat lehet 4 abronccsal megtenni. Ezt az értéket a két szám *harmonikus közepének* nevezzük.

II. megoldás. A megengedett kilométerszámok aránya $15\,000 : 25\,000 = 3 : 5$, tehát egy abroncsot hátsó kerékről első kerékre átszerelve még megtehető útja $5/3$ -szorosára nő, ha pedig előlről hátra szerelik át, $3/5$ -szörösére csökken.

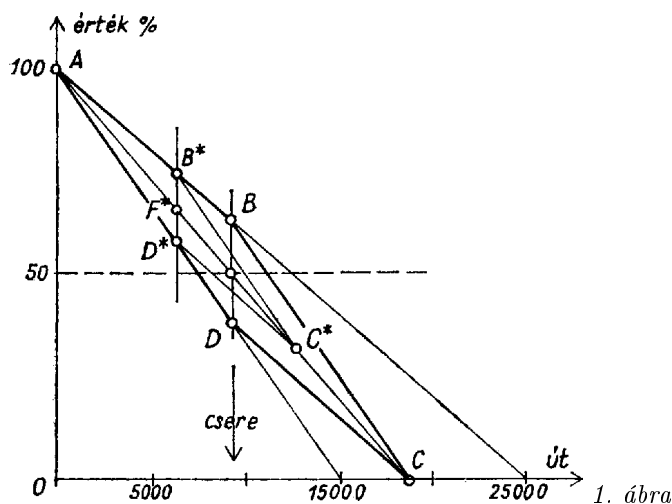
Ha a kocsit az abroncsokkal már x km-t futott, akkor az első abroncsok még $25\,000 - x$ km-t futhattak volna, csere esetén viszont már csak $\frac{3}{5}(25\,000 - x)$ km-t, míg a hátsók a fennmaradt $15\,000 - x$ km út helyett még $\frac{5}{3}(15\,000 - x)$ km-en használhatók. x -et úgy kell meghatároznunk, hogy a kétféle abroncs még megtehető útja egyenlő legyen:

$$\frac{3}{5}(25\,000 - x) = \frac{5}{3}(15\,000 - x).$$

Innen $x = 9375$ km, a csere után megtett út $3 \cdot 15\,625/5 = 9375$ km, tehát a kocsit $18\,750$ km-t futhat.

Pénzes Béla (Esztergom, Temesvári Pelbárt Gimn. II. o. t.)

Megjegyzés. Felhasználhatjuk azt is, hogy a csere előtt és után megtett út egyenlő, hiszen különben a hátsó keréken többet futott abroncs teljes elkopásakor a másik abroncs még használható volna. Így a valamivel egyszerűbb $3(25\,000 - x)/5 = x$ egyenlethez jutunk.



III. megoldás. Az új abroncsot 100 %, az elkopottat 0 % értékűnek véve ábrázoljuk, hogyan változik az abroncsok érték-állapota a megtett úttal. A kétféle abroncsnak az első felszerelésből adódó érték-grafikonját úgy kapjuk, hogy az érték-tengely 100%-kal jelölt A pontját egyenesszakasszal összekötjük az úttengely 15 000 km, ill. 25 000 km jelölésű pontjával. Az abroncsokat felcserélve grafikonjaik meredeksége is felcserélődik, a két útszakasznak megfelelő 4 grafikonszakasz paralelogrammát ad, ezt akarjuk megszerkeszteni.

A kétféle abroncs ugyanakkora út megtétele után éri el a 0 %-os érték-állapotot, ezért a két grafikon az út tengelyen metszi egymást, ez lesz a paralelogrammának A -val szemben levő C csúcsa. A további B és D csúcsok felelnek meg az abroncs-cserének, ezért a két csúcs az út-tengely ugyanazon pontja fölött van, tehát ismerjük a BD átló irányát: párhuzamos az érték-tengellyel. Ebből megszerkeszthetjük a másik átló helyzetét. Ugyanis a BD átlóval párhuzamos egyeneseknek a BAD szögtartományba eső szakaszait az AC átló felezi. Így, véve egy tetszőleges szerinti, az érték-tengellyel párhuzamos egyenest, ennek a két grafikon közé eső B^*D^* szakaszát felező F^* pont az AC átlón van, tehát AF^* az út-tengelyből kimetszi C -t, és az ehhez tartozó abszcissza-érték a keresett úthossz.

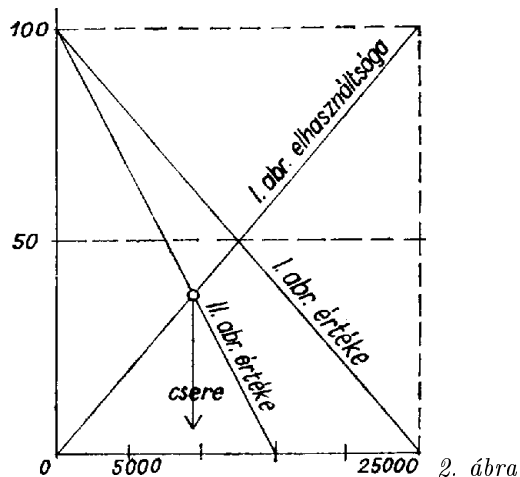
Megjegyzések. 1. A feladat kérdésének megválaszolásához B és D megszerkesztése nem szükséges, a csere végrehajtásához viszont éppen azt kell tudni, hogy a kilométeróra mely állásánál történjék az abroncsok cseréje.

2. Ez a megoldás lényegében az I. megoldás grafikus változata. A megegyezés még jobban kiütköznék, ha paralelogrammává egészítenők ki a D^*AB^* háromszöget, és a kapott C^* ponton át húznók meg az átlót.

3. A két átló felezi egymást, így metszéspontjuk az 50 %-nak megfelelő magasságban az út-tengellyel párhuzamosan húzott egyenesen van. Ha erre az egyenesre tükrözzük az egyik kerék érték-grafikonját, a tükörkép a másik grafikont az abroncs-cserének megfelelő pontban metszi.

Ehhez közvetlen meggondolással is eljuthatunk, hiszen az egyik abroncs a csere után annyit fog még kopni, amennyit a másik addig kopott, tehát elhasználtsága egyenlő a másik értékével, és a tükrözött grafikon a kerék elhasználtságát (értékcsökkenését) szemlélteti (2. ábra).

(Egy névtelen, szöveg nélküli grafikon felhasználásával)



2. ábra