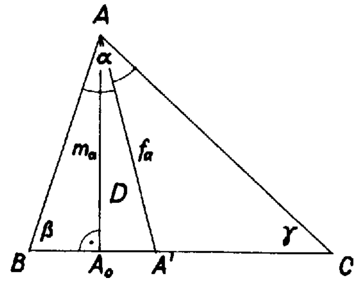
**I. megoldás.** Legyen a kívánt háromszög $ABC$, ebben a $BC = a$ oldal, valamint az $A$ csúcsból húzott $AA' = f_a$ szögfelező és $AA_0 = m_a$ magasság rendre egyenlő az adott három hosszúsággal. Legyen továbbá az $A$, $B$, $C$ csúcsnál levő szög rendre $\alpha$, $\beta$, $\gamma$.



*1. ábra*

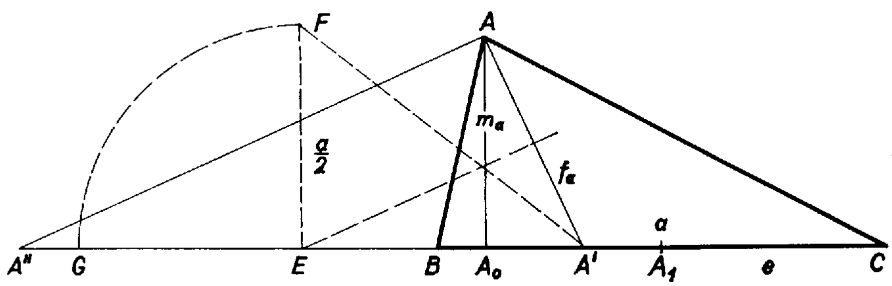
Egyelőre feltesszük, hogy $f_a > m_a$. Így az $AA'A_0 = D$ derékszögű háromszögnek három független alkatrészét ismerjük. Szögeit kifejezhetjük az $ABC\Delta$ szögeivel. A feltevés miatt az $AB$ és $AC$ oldalak hossza különböző, válasszuk a jelölést úgy, hogy $AB < AC$, így $\gamma < \beta$. Ekkor $A'$ az $A_0C$ szakaszon van, és $AA'A_0\sphericalangle = \gamma + \alpha/2 = \big[180° - (\beta - \gamma)\big]/2$, mint az $AA'C\Delta$ külső szöge, továbbá

$$A'AA_0\sphericalangle = 90° - AA'A_0 = \frac{1}{2}(\beta - \gamma).$$

Eszerint $D$ megszerkesztésével ismertté vált az $a$ oldal végpontjainál levő szögek különbsége, ill. a kiegészítő szögének a fele, és ezzel az észrevétellel feladatunkat visszavezettük az 1964. évi Arany Dániel kezdők versenye II. fordulójának 2. feladatára[1] ahol éppen a szóban forgó különbség került felhasználásra. – Mint láttuk, a feladatnak mindig van megoldása éspedig lényegében egy.

$f_a = m_a$ esetén az $ABCD\Delta$ szükségképpen egyenlő szárú, a szerkesztés alapfeladatnak tekinthető; $f_a < m_a$ esetén pedig nincs megoldás.

*Varsányi Anikó* (Budapest, Ságvári E. gyak. g. I. o. t.)



*2. ábra*

**II. megoldás.** Állítsunk merőlegest az I. megoldásbeli $AA'$ szögfelezőre $A$-ban, messe ez az $A'A_0$ egyenest $A''$-ben. $AA''$ az $ABC\Delta$ $A$-nál levő külső szögének felezője, $A''$ a $BC$ oldal $B$-n túli meghosszabbításán adódik. Ismeretes, hogy a belső szögfelező $A'$ talppontja $B$-től és $C$-től mért távolságainak aránya egyenlő az $AB : AC$ aránnyal, és hasonlóan belátható, hogy a tétel $A''$-re is igaz. Így

$$\frac{BA'}{CA'} = \frac{BA}{CA} = \frac{BA''}{CA''}, \qquad BA' \cdot CA'' = BA'' \cdot CA'. \tag{1}$$

Ennek alapján kiszámíthatjuk és megszerkeszthetjük a $BA' = x$ szakaszt. Ugyanis $CA' = a - x$, $BA'' = A'A'' - x$, $CA'' = CB + BA'' = a + A'A'' - x$, és itt $A'A''$ kifejezhető az adatokkal: szerkesztésünk folytán az $A'A''A$ és $A'AA_0$ derékszögű háromszögekből

$$A'A'' = d = \frac{A'A^2}{A'A_0} = \frac{f_a^2}{\sqrt{f_a^2 - m_a^2}}.$$

Mindezeket (1)-be helyettesítve a szokásos rendezési lépésekkel

$$x^2 - (a + d)x + ad/2 = 0,$$

$$x = x_1 = \frac{1}{2}\left(a + d - \sqrt{a^2 + d^2}\right) = \frac{a}{2} + \frac{d}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2},$$

[1] A megoldást lásd K.M. L. 30 (1965) 2 – 3. o.,

ugyanis az egyenlet $a$-nál kisebb gyökére van szükségünk. ($x_2$ a $CA''$ szakasz hosszát adja, ugyanis a gyökök összege $a+d$, és így $x_2 = a + (d - x_1) = CB + BA'' = CA''$.)

A fentiekből a következő szerkesztés adódik. Egy $e$ egyenes $A_0$ pontjában állított merőlegesre felmérjük az adott $m_a$ magasságot, a végpont $A$: körívet írunk $A$ körül a szögfelező $f_a$ hosszával, mint sugárral, ennek $e$-vel való egyik metszéspontja $A'$. Megszerkesztjük $AA'$ felező merőlegesét, ennek $e$-vel való metszéspontja $E$. Itt merőlegest állítunk $e$-re és rámérjük az adott $a$ oldal felét, úgyszintén $A'E$-nek $E$-n túli meghosszabbítására is, a végpont $F$, ill. $G$. Az $A'F$ szakaszt $G$-ből $E$ felé felmérve kapjuk $B$-t, és innen tovább $a$-t felmérve $C$-t.

Hely hiányában az olvasóra bízzuk a szerkesztés helyességének bizonyítását, – ami csupán annak megmutatásában áll, hogy $AA'$ felezi a $BAC$ szöget –, továbbá azét, hogy $f_a > m_a$ esetén mindig egy megoldás van.

*Szentiványi Béla* (Budapest, Rákóczi F. g. II. o. t.)

*Megjegyzés.* Az $A'$ és $A''$ pontok $B$-től mért távolsága az osztásarányra idézett tételek alapján kifejezhető az oldalakkal: $A'B = ac/(b+c)$, $A''B = ac/(b-c)$. Ezekkel kifejezhetjük a $BC$ oldal $A_1$ felezőpontjától mért $A'A_1 A''A_1$ távolságokat is: $A'A_1 = A_1B - A'B = a(b-c)/\big(2(b+c)\big)$, $A''A_1 = A''B + BA_1 = a(b+c)/\big(2(b-c)\big)$, ebből az $A_1A' \cdot A_1A'' = BC^2/4$ összefüggés adódik. Ennek alapján $A_1$ helyzetét határozhatjuk meg $A'$-höz és $A''$-höz képest a fenti eljáráshoz hasonlóan.

*Bóta Károly* (Budapest, Fazekas M. g. II. o. t.)