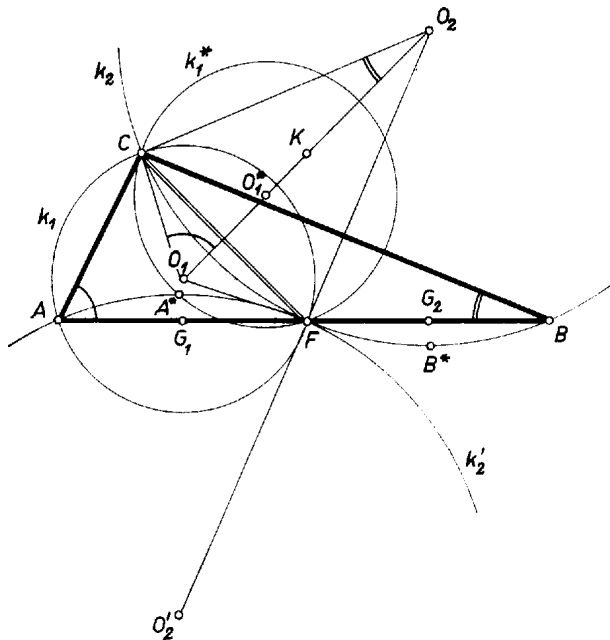


Legyen a kérdéses háromszög ABC , amelyben az AB oldalhoz tartozó CF súlyvonal egyenlő az adott s_c szakasszal, az ACF és BCF háromszög köré írt k_1 , ill. k_2 kör sugara pedig az adott r_1 , ill. r_2 szakasszal.

C , F és a körök O_1 , ill. O_2 középpontja egy deltoidot alkotnak, mert $CO_1 = FO_1 = r_1$, és $CO_2 = FO_2 = r_2$, ez a három adott szakaszból megszerkeszthető. Ez után olyan egyenest kell szerkesztenünk F -en át, melynek a k_1 -gyel és k_2 -vel való, és F -től különböző metszéspontjai közti szakaszt az F pont felezi, e két metszéspont lesz az A , ill. B csúcs. Ez ismert szerkesztés: vesszük k_2 -nek F -re vonatkozó k'_2 tükörképét, ennek k_1 -gyel való (F -től különböző) metszéspontja A , B -t pedig az AF egyenes metszi ki k_2 -ből. Az ABC háromszög nyilvánvalóan megfelel a követelményeknek.



A CO_1FO_2 deltoid létrejön, ha $r_1 \geq s_c/2$, $r_2 > s_c/2$. (A jelölést úgy választottuk, hogy $r_1 \leq r_2$.) Így O_1 eshet CF -re, de O_2 nem, különben a két kör azonos lenne, holott pl. k_1 nem mehet át B -n; $r_1 = s_c/2$ esetén a háromszögben A -nál derékszög van. Ha a deltoid – ill. elfajulás esetén a CFO_2 háromszög – létrejött, akkor a szerkesztés mindig befejezhető, A (és B) létrejön, mert k_1 -nek és k'_2 -nek egy közös pontja F , és a második metszéspont ettől különböző – a két kör nem érintkezhet –, O'_2F nem mehet át O_1 -en, mert az O_1O_2 egyenestől különböző, és közös pontjuk O_2 .

A feladatnak általában 2 különböző háromszög felel meg aszerint, hogy O_1 -et és O_2 -t a CF -nek ugyanegy partján választjuk (ekkor a deltoid konkáv), vagy a két partján (az előbbi esetben pl. k_1 helyett CF -re vonatkozó k'_1 tükörképét használjuk). $r_1 = r_2$ esetén azonban csak az utóbbi megválasztás ad háromszöget, 1 megoldás van, úgyszintén $r_1 = s_c/2 < r_2$ esetén is.

Lelkes András (Pannonhalma, Benedek-rendi g. I. o. t.)

Megjegyzések. 1. A deltoid előállítás után a szerkesztést így is befejezhetjük. Legyen az AF , FB , O_1O_2 szakasz felezőpontja rendre G_1 , G_2 , ill. K . Az $O_1G_1G_2O_2$ négyszög derékszögű trapéz (lehet hurkolt is, vagy elfajulhat derékszögű háromszöggé), és benne a KF szakasz középvonal, tehát merőleges G_1G_2 -re. Ennek alapján az AB egyenest megadja az F -en átmenő és a KF -re merőleges egyenes.

2. Az O_1O_2C háromszögben $CO_1O_2\angle = CO_1F\angle/2 = CAF\angle = CAB\angle$ (akkor is, ha tompaszög, ebben az esetben $CO_1F > 180^\circ$), és ugyanígy $CO_2O_1\angle = CBA\angle$. Így az O_1O_2C háromszög hasonló a keresett ABC háromszöghöz (a csúcsok a felsorolás rendjében felelnek meg egymásnak). Eszerint a deltoid előállítás után a szerkesztés befejezhető hasonlósági transzformációval.

3. Ajánljuk az olvasóknak az utóbbi két megoldás-vázlatban a szerkesztés helyessége bizonyításának végrehajtását.