I. megoldás. Bontsuk az egyenlőtlenség B bal oldalát tagokra:

$$B = 4a^3 + 4b^3 + 4c^3 + a^2b + b^2c + c^2a - 5ab^2 - 5bc^2 - 5ca^2.$$

Itt a helyébe b-t, b helyébe c-t, c helyébe a-t, vagy pedig a helyébe c-t, c helyébe b-t, b helyébe a-t írva B-ben csak a tagok cserélődnek meg, B értéke nem változik. Ennek következtében az egyik betűről kiköthetjük, hogy pl. a legkisebb vagy legnagyobb, vagy a középső számot jelentse a három közül. Ennek alapján megpróbáljuk B-t olyan kifejezések összegévé alakítani, amelyek egyike sem lehet negatív, szükség esetén felhasználva az éppen mondott lehetőséget is.

$$\begin{aligned}B =&4a^3 - 4a^2c + 4b^3 - 4b^2a + 4c^3 - 4c^2b+\\ &+ a^2b - ab^2 + b^2c - bc^2 + c^2a - ca^2 =\\ =&(a-c)(4a^2 - ac) + (b-a)(4b^2 - ab) + (c-b)(4c^2 - bc) =\\ =&3a^2(a-c) + a(a-c)^2 + 3b^2(b-a) + b(b-a)^2+\\ &+ 3c^2(c-b) + c(c-b)^2.\end{aligned}$$

Itt a második, negyedik és hatodik tag nem lehet negatív, az első, harmadik és ötödik tag H összegéből egy különbséget kiküszöbölhetünk, ha pl. $a-c$ helyett $(a-b)+(b-c)$-t írunk:

$$\begin{aligned}H &= 3(a-b)(a^2-b^2) + 3(b-c)(a^2-c^2) =\\ &= 3(a-b)^2(a+b) + 3(a-c)(b-c)(a+c).\end{aligned}$$

Itt az első tag ismét nem lehet negatív, továbbá ha c nem nagyobb sem a-nál, sem b-nél, amit feltehetünk a fentiek szerint, akkor a második sem negatív. Ezzel beláttuk, hogy B nem lehet negatív, nulla is csak akkor, ha $a-b=b-c=c-a=0$, azaz $a=b=c$.

Kafka Péter (Pannonhalma, Benedek–rendi Gimn. I. o. t.) és
Pintér János (Budapest, I. István G. II. o. t.)
dolgozatából, kiegészítésekkel

II. megoldás. Kézenfekvő gondolat megpróbálni az egyenlőtlenség B bal oldalát $(a-b)^2$, $(b-c)^2$, $(c-a)^2$ egy–egy pozitív értékkel szorzott értékei összegeként előállítani. Megpróbáljuk ezeket a szorzókat egyrészt a, b, c-ben első fokúnak választani, másrészt a különbségben nem szereplő betű együtthatóját 0-nak választjuk, miután B-ben nem szerepel mindhárom betűt tartalmazó tag, amint az előbbi megoldásban láttuk; végül azt is várjuk a szorzóktól, hogy a helyett b-t, b helyett c-t, c helyett a-t írva egymásba menjenek át, ugyanúgy, mint a szóban forgó különbségek, miután ez a felcserélés B-t sem változtatja meg, csak tagjait cseréli meg. Ha tehát van olyan u és v, amelyre

$$B = (a-b)^2(au+bv) + (b-c)^2(bu+cv) + (c-a)^2(cu+av),$$

és ezek pozitívnak adódnak, akkor a feladat állítását bebizonyítottuk.

A jobb oldalon a köbös tagok együtthatója $u+v$, az a^2b, b^2c, c^2a tagoké $v-2u$, az ab^2, bc^2, ca^2 tagoké $u-2v$, tehát

$$u+v=4, \qquad v-2u=1, \qquad u-2v=-5$$

kell, hogy teljesüljön. Az egyenletrendszernek van megoldása: $u=1$, $v=3$, így a következőt nyertük:

$$\begin{aligned}B &= 4a^3 + 4b^3 + 4c^3 + a^2b + b^2c + c^2a - 5ab^2 - 5bc^2 - 5ca^2 =\\ &= (a-b)^2(a+3b) + (b-c)^2(b+3c) + (c-a)^2(c+3a) \geq 0.\end{aligned}$$

Egyenlőség akkor áll fenn, ha $a-b=b-c=c-a=0$, azaz $a=b=c$.