

I. megoldás. A követelmény így is írható:

$$(2) \quad 0 < x \leq y \leq z.$$

Hozzáadva (1) mindkét oldalához x^2 -et, a bal oldal tényezőkre bontható:

$$(x^2 + xy) + (yz + zx) = x(x + y) + z(x + y) = (x + y)(x + z) = 80 + x^2.$$

Eszerint x -et megválasztva, majd $80 + x^2$ -et két természetes szám szorzatára felbontva, végül a kisebb tényezőt (ha a tényezők különbözők) $x + y$ -nak, a nagyobbat $x + z$ -nek véve, megoldást kapunk, hacsak a kisebb tényezőtől x -et levonva, az y maradék nem kisebb x -nél, más szóval, ha a kisebb tényező legalább $2x$.

Legyen pl. $x = 1$, így

$$(y + 1)(z + 1) = 81 = 1 \cdot 81 = 3 \cdot 27 = 9 \cdot 9,$$

és az utóbbi két felbontásból egy-egy megoldást kapunk:

$$\begin{array}{lll} \text{I.} & x = 1, & y = 2, \quad z = 26; \\ \text{II.} & & 1, \quad 8, \quad 8. \end{array}$$

x legnagyobb szóba jövő értéke 5, mert (1) bal oldalán mindegyik tényező helyett x -et írva a kifejezés csökken vagy változatlan marad, tehát $3x^2 \leq 80$.

Végigmenve az $x = 2, 3, 4, 5$ értékeken, a jobb oldalnak alább csak azokat a szorzat-felbontásait írjuk fel, amelyekben egyik tényező sem kisebb $2x$ -nél. Az $x = 3$ próbálkozásból nem kapunk megoldást, mert $80 + 3^2 = 89$ prímszám, $x = 5$ -ből pedig az előírt nagyságviszony miatt.

$$\begin{array}{ll} x = 2 : & 84 = 4 \cdot 21 = 6 \cdot 14 = 7 \cdot 12, \\ x = 4 : & 96 = 8 \cdot 12. \end{array}$$

Ezekből a következő további megoldások adódnak:

$$\begin{array}{lll} \text{III.} & x = 2, & y = 2, \quad z = 19; \\ \text{IV.} & & 2, \quad 4, \quad 12; \\ \text{V.} & & 2, \quad 5, \quad 10; \\ \text{VI.} & & 4, \quad 4, \quad 8. \end{array}$$

Eszerint a követelménynek megfelelő megoldások száma 6.

Megjegyzés. A megoldásban alkalmazott fogásra így is rájöhettünk. Próbálkozzunk $x = 1$ -gyel. Így

$$y + z + yz = 80, \quad y = \frac{80 - z}{z + 1} = \frac{81 - (z + 1)}{z + 1} = \frac{81}{z + 1} - 1,$$

tehát $z + 1$ osztója 81-nek. Általában

$$y = \frac{80 - xz}{x + z},$$

avégett, hogy az osztást itt is részben elvégezhessek, a számláló tagjait x^2 -nel vagy z^2 -nel kell növelnünk.

II. megoldás. Mint az I. megoldásban láttuk, $1 \leq x \leq 5$; y és z az

$$u^2 - (y + z)u + yz = 0$$

egyenlet u -ra adódó két gyöke, feltéve, hogy ezek x -nél nem kisebb egész számok. Ha $y + z$ -t s -sel jelöljük, akkor $yz = 80 - xs$, tehát azokat az s értékeket kell megkeresnünk, amelyekre az

$$u^2 - su + (80 - xs) = 0$$

egyenlet gyökei x -nél nem kisebb egészek. Itt x -nek 1-től 5-ig az egész számok választandók.

Szükséges ehhez, hogy az egyenlet diszkriminánsa négyzetszám legyen:

$$D = (s + 2x)^2 - 4(80 + x^2) = t^2.$$

Innen

$$(s + 2x + t)(s + 2x - t) = 4(80 + x^2), \quad \text{és} \\ y, z = \frac{s \pm t}{2}.$$

Mivel a bal oldal két tényezője egyszerre páros vagy páratlan, a jobb oldal pedig páros, így mind a két tényező páros, $80 + x^2$ -et $v \cdot w$ alakban írva, ahol $v \geq w$

$$\begin{array}{ll} s + 2x + t = 2v, & s + 2x - t = 2w, \\ s = v + w - 2x, & t = v - w, \\ y = \frac{s + t}{2} = w - x, & z = \frac{s - t}{2} = v - x. \end{array}$$

x szóba jövő értékeit végigpróbálva az I. megoldásban talált 6 értékhármast kapjuk.