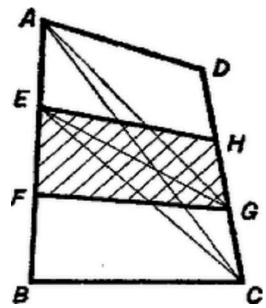
I. megoldás. Bontsuk fel a vizsgálandó $EFGH$ négyszöget az EG átlóval az EFG és GHE háromszögekre (1. ábra). Az előbbinek a területe nyilvánvalóan egyenlő az AEG háromszög területével, az utóbbié a CGE háromszögével, így az $EFGH$ négyszög területe egyenlő az $AECG$ négyszög területével.



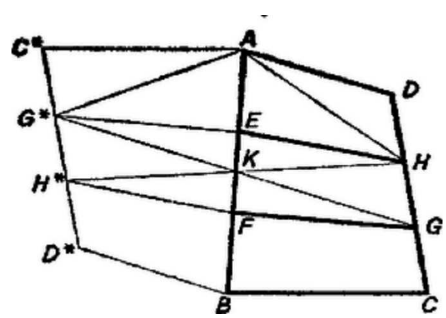
1. ábra

Bontsuk fel ezt az AC átlóval az AEC és CGA háromszögekre. Az előbbinek a területe harmadrésze az ABC háromszög területének, az utóbbié pedig a CDA háromszögének, így az $AECG$ négyszög területe – tehát az $EFGH$ négyszögé is – egyenlő az ABC és CDA háromszögekkel kitöltött $ABCD$ négyszög területének harmadrészével. Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

Reményi Katalin (Budapest, XI. ker. Szamuely T. ált. isk. 8. o. t.)

Megjegyzés. Az utolsó lépésig csak azt használtuk fel, hogy az AE és EF, valamint CG és GH szakasz-párok egyenlők, nem volt szó az FB és HD szakaszról. Ha tehát AE és EF pl. negyedrésze volna AB-nek, és CG és GH ugyancsak negyedrésze CD-nek, akkor az $EFGH$ négyszög területe negyedrésze lenne az $ABCD$ négyszög területének.

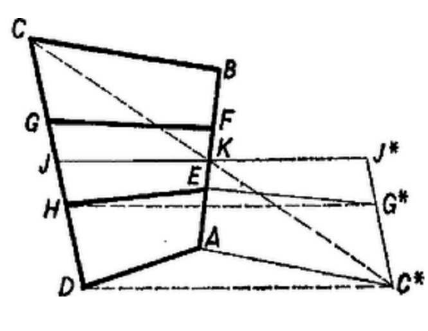
II. megoldás. Tükrözzük ábránkat az AB oldal és az EF szakasz közös K felezőpontjára, és legyen C, G, H, D tükörképe rendre C^*, G^*, H^*, D^* (2. ábra). Így elég azt megmutatnunk, hogy az $EG^*H^*FGH = S_1$ és AC^*D^*BCD centrálisan szimmetrikus hatszögek területeinek aránya $1:3$, vagy másképpen – mivel a $BCGFH^*D^*$ hatszög az $AC^*G^*EHD = S_2$ hatszög tükörképe, és így területük egyenlő –, hogy az S_1 és S_2 hatszögek területe egyenlő.



2. ábra

Megrajzolva a GG^*, HH^*, AH és AG^* átlókat, a KEH és KFH^* háromszögek egybevágók, területük összege egyenlő az AEH háromszög területével, mert ennek H-ból induló magassága közös a KEH háromszöggel, AE alapja pedig kétszerese EK-nak. Ugyanígy a KFG és KEG^* háromszögek területének összege egyenlő az AEG^* háromszög területével. Végül a KGH és KG^*H^* háromszögek területének összege és az AHD és AC^*G^* háromszögek területének összege is egyenlő, mert a párhuzamos CD és C^*D^* egyenesekbe eső oldalaik egyenlők, és az erre merőleges magasságaik összege egyenlő a mondott két egyenes távolságával. Így az S_1-ben és S_2-ben keletkezett valamennyi rész-idom területeinek összege egyenlő. Ezt akartuk bizonyítani.

Hoffer Anna (Budapest, Hámán K. g. III. o. t.)

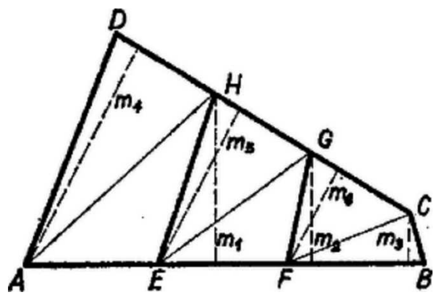


3. ábra

III. megoldás. Legyen ismét AB és EF közös felezőpontja K, továbbá CD és GH közös felezőpontja J (3. ábra). Tükrözzük K-ra a $KBCJ$ négyszöget, jelöljük C, G, J tükörképét C^*, J^*, G^*-gal; B és F tükörképe A, ill. E. A feladat állítása az $AC^*J^*JD = T$ ötszögre fogalmazva annak bizonyítását kívánja, hogy területe háromszor akkora, mint az $EG^*J^*JH = T_1$ ötszögé. Meghúzva a C^*D és G^*H átlókat, a T ötszög a JDC^*J^* paralelogrammából úgy áll elő, hogy ahhoz a DAC^* háromszöget vagy hozzáillesztjük, vagy kivágjuk belőle (az ábrán az utóbbit látjuk), és ugyanígy áll elő a T_1 ötszög a JHG^*J^* paralelogrammából és a HEG^* háromszögből; lehetséges az is, hogy C^*D átmegy A-n, ekkor G^*H is átmegy E-n, és így mindegyik ötszög területe egyenlő a megfelelő paralelogrammáéval.

Az ötszögek és részeik összehasonlításában közös alapnak a $C^*D = J^*J = G^*H$ szakaszt véve elég azt belátnunk, hogy D-nek J^*J fölötti magassága 3-szor akkora, mint H-é, továbbá hogy A-nak C^*D fölötti magassága 3-szor akkora, mint E-nek G^*H fölötti magassága. Az első következik abból, hogy nyilvánvalóan $JD = 3JH$, a második pedig a $KA = 3KE$ egyenlőségből, meggondolva még, hogy A és E kívánt magasságát a paralelogrammák magasságaiból, valamint J^*J fölötti magasságaikból kapjuk, mindig a nagyobból vonva ki a kisebbet.

Babai László (Budapest, VIII. ker., Somogyi B. u. ált. isk. 8. o. t.)



4. ábra

IV. megoldás. Húzzuk meg az AH, EG, FC szakaszokat és bocsássunk merőlegest AB-re a H, G, C pontokból, valamint CD-re A-ból, E-ből és F-ből, legyen ezek hossza rendre m_1, m_2, m_3, illetőleg m_4, m_5, m_6 (4. ábra). Az így 6 háromszögre felosztott $ABCD$ négyszög területe

$$\frac{CD}{6}(m_4+m_5+m_6)+\frac{AB}{6}(m_1+m_2+m_3),$$

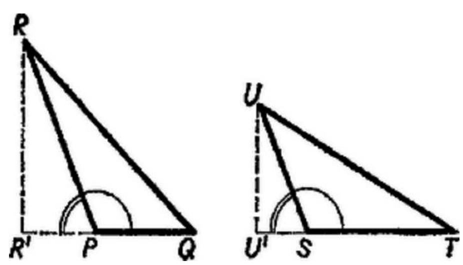
az $EFGH$ négyszög területe pedig

$$\frac{CD}{6}\cdot m_5+\frac{AB}{6}\cdot m_2.$$

Elég megmutatnunk, hogy az első terület zárójeles kifejezései rendre 3-szor akkorák, mint a másodikban az m_5, ill. m_2 tényező.

Ez fennáll, mert az m_1 és m_3 párhuzamos oldalakkal meghatározott trapézben m_2 középvonal, így $m_1+m_3=2m_2$, mindkét oldalhoz m_2-t adva $m_1+m_2+m_3=3m_3$, és ugyanígy $m_4+m_5+m_6=3m_5$. Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

Augusztinovicz Fülöp (Sopron, Széchenyi I. g. I. o. t.)



5. ábra

V. megoldás. Megmutatjuk, hogy ha két háromszögnek egy-egy szöge egyenlő, akkor területeik aránya megegyezik az egyenlő szögeket bezáró oldalak szorzatainak arányával. Legyen egyenlő a PQR háromszög QPR szöge az STU háromszög TSU szögével, továbbá az R, ill. U csúcs vetülete a szemben levő oldalon R', ill. U' (5. ábra). Ekkor, felhasználva a PRR' és SUU' derékszögű háromszögek hasonlóságát:

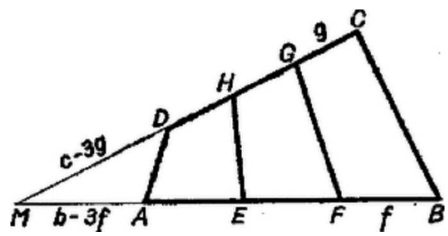
$$\frac{t_{PQR}}{t_{STU}}=\frac{PQ\cdot RR'}{ST\cdot UU'}=\frac{PQ}{ST}\cdot\frac{RR'}{UU'}=\frac{PQ}{ST}\cdot\frac{PR}{SU}=\frac{PQ\cdot PR}{ST\cdot SU}.$$

Ezt így is írhatjuk:

$$t_{PQR}=k\cdot PQ\cdot PR \quad \text{és} \quad t_{STU}=k\cdot ST\cdot SU,$$

ahol k alkalmas szám (csak a P-nél, ill. S-nél levő szög nagyságától függ).

Ha az $ABCD$ négyszögben CD párhuzamos AB-vel, akkor az állítás helyessége nyilvánvaló, mert a két szóban forgó négyszög egyenlő magasságú trapéz és bennük a megfelelő alap-párok aránya 1 : 3.



6. ábra

Az ellenkező esetben az AB és CD oldalak M metszéspontja a konvexség miatt ezen oldalak meghosszabbításán van; válasszuk a betűzést úgy, hogy $MA < MB$, és így $MD < MC$ (6. ábra), legyen továbbá $MB = b$, $MC = c$, $FB = f$, $GC = g$, ezekkel

$$MF = b - f, \quad ME = b - 2f, \quad MA = b - 3f,$$
$$MG = c - g, \quad MH = c - 2g, \quad MD = c - 3g$$

(mind pozitívok). Az $ABCD$ négyszög területe egyenlő az MBC és MAD háromszögek területének különbségével, $EFGH$-é pedig az MFG és MEH háromszögekével. E négy háromszög M-nél levő szöge közös, így fenti segédtételünk szerint

$$\begin{aligned} t_{ABCD} &= t_{MBC} - t_{MAD} = k(MB \cdot MC - MA \cdot MD) = \\ &= k\,[bc - (b-3f)(c-3g)] = 3k(bg + cf - 3fg), \\ t_{EFGH} &= t_{MFG} - t_{MEH} = k(MF \cdot MG - ME \cdot MH) = \\ &= k\,[(b-f)(c-g) - (b-2f)(c-2g)] = k(bg + cf - 3fg), \end{aligned}$$

amiből az állítás helyessége nyilvánvaló.

Kiss Árpád (Budapest, Bláthy O. erősár. ip. t. II. o. t.)

Megjegyzés. A felhasznált segédtétel akkor is helyes, ha a két háromszög egy-egy szöge egymásnak kiegészítő szöge.