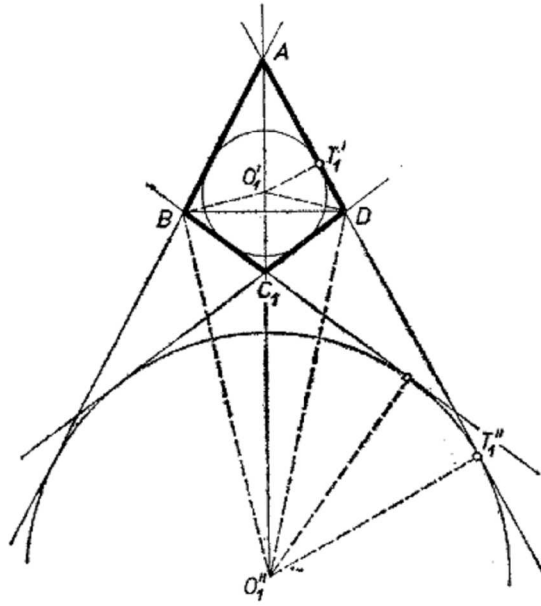


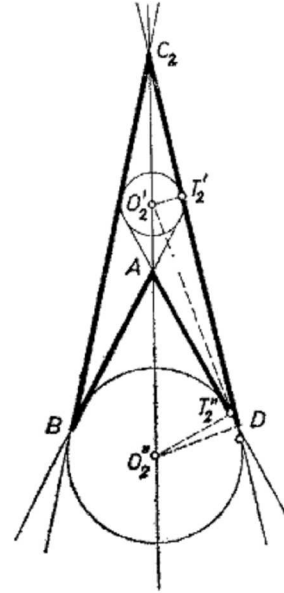
I. megoldás. Legyen a feltételeknek megfelelő $ABCD$ deltoid szimmetria-tengelye az AC egyenes, így $AC = 21$, $BD = 16$, továbbá $AB = 17$ egység.

AC és BD metszéspontját M -mel jelölve az ABM derékszögű háromszögből Pythagorász tétele alapján $AM = 15$. Ha C az AM szakasz M -en túli meghosszabbításán van, akkor ABC_1D konvex deltoid (1. ábra), ha pedig az A -n túli meghosszabbításán, akkor ABC_2D konkáv deltoid (2. ábra). Az előbbiben $MC_1 = AC_1 - AM = 6$, és így $C_1B = 10$, a másodikban $MC_2 = AC_2 + AM = 36$, és így $C_2B = \sqrt{1360} = 4\sqrt{85}$.

Mindkét deltoid esetében 2 olyan kör szerkeszthető, amely mindegyik oldal egyenesét érinti. Ugyanis a kör középpontja egyrészt az AC tengelyen van, ami az A -nál és C -nél levő szögek egybeeső felezője, másrészt például az AB , BC egyenespár közti szögek valamelyikének felezőjén; márpedig 2 szögfelező van, és mindegyik metszi a tengelyt, mert az ABC háromszög sem a konvex, sem a konkáv deltoid esetében nem egyenlő szárú. A metszéspontok körül az AB és BC egyeneseket érintő kört rajzolva, ez a szimmetria miatt az ezekre tükrös AD , DC egyeneseket is érinti.



1. ábra



2. ábra

Meg gondolásunkat folytatva kiszámítjuk a körök középpontjának A -tól mért távolságát, majd ebből a sugarát. Messe a tengelyt az ABC_i háromszög B -nél levő belső szögének felezője O'_i -ben, a külső szögé O''_i -ben ($i = 1, 2$). Ekkor a szögfelező osztásarányára ismert tétel szerint mindegyik középpont esetében

$$AO : C_iO = AB : C_iB,$$

és mivel a belső szögfelezők AC_i -vel való metszéspontjára $AO'_i + O'_iC_i = AC_i$, a külsőkre pedig $AO''_1 - C_1O''_1 = AC_1$, ill. $C_2O''_2 - AO''_2 = C_2A$ (ugyanis $AB > BC_1$ és $C_2B > AB$), azért

$$\begin{aligned} AO_i &= AC_i \frac{AB}{AB + C_iB}; & AO'_1 &= \frac{119}{6}, & AO'_2 &= \frac{357}{17 + 4\sqrt{85}} = \frac{1}{3}(4\sqrt{85} - 17); \\ AO''_1 &= AC_1 \frac{AB}{AB - C_1B} = 51, \\ AO''_2 &= AC_2 \frac{AB}{C_2B - AB} = \frac{357}{4\sqrt{85} - 17} = \frac{1}{3}(4\sqrt{85} + 17). \end{aligned}$$

Legyen végül a kör érintési pontja az AB egyenesen T (azaz T'_1, T''_1, T'_2, T''_2), akkor a közös hegyesszöggel bíró AOT és ABM derékszögű háromszögek hasonlóságából az érintő kör sugara bármelyik kör esetére

$$OT = r = MB \cdot \frac{AO}{AB} = \frac{8}{17}AO,$$

és a 4 körre rendre

$$\begin{aligned} r'_1 &= \frac{56}{9}, & r''_1 &= 24, & r'_2 &= \frac{8}{51}(4\sqrt{85} - 17) \approx 3,12, \\ r''_2 &= \frac{8}{51}(4\sqrt{85} + 17) \approx 8,45. \end{aligned}$$

II. megoldás. Az érintő körök sugarát megkaphatjuk a deltoid t területének kétféle kifejezéséből. Egyrészt $t = AC \cdot BD/2$, másrészt a belső érintő körök esetében, t ama négy háromszög területének összege, amelyekre a deltoid oszlik, ha csúcsait összekötjük a beírt kör középpontjával. E háromszögek alapjainak az egymás utáni oldalakat véve, magasságuk a beírt kör r'_i sugara, tehát

$$2t = r'_i(2AB + 2C_iB) = AC \cdot BD,$$

$$r'_1 = \frac{56}{9}, \quad r'_2 = \frac{8}{51}(4\sqrt{85} - 17).$$

A külső érintő körök esetében a csúcsok és O''_i összekötésével előálló háromszögek területéből úgy kapjuk a deltoid területét, ha alkalmasan választott kettőjük területének összegéből kivonjuk a másik két háromszög területének összegét. A területeket ugyanúgy jelölve, mint magukat az idomokat:

$$t = ABO''_1D - C_1BO''_1D = (ABO''_1 + ADO''_1) - (C_1BO''_1 + C_1DO''_1) =$$

$$= r''_1(AB - C_1B) = \frac{AC_1 \cdot BD}{2},$$

$$t = C_2BO''_2D - ABO''_2D = (C_2BO''_2 + C_2DO''_2) - (ABO''_2 + ADO''_2) =$$

$$= r''_2(C_2B - AB) = \frac{AC_2 \cdot BD}{2};$$

$$r''_1 = \frac{AC_1 \cdot BD}{2(AB - C_1B)} = 24, \quad r''_2 = \frac{AC_2 \cdot BD}{2(C_2B - AB)} = \frac{8}{51}(4\sqrt{85} + 17).$$

Megjegyzés. Több versenyző a koordináta-geometria módszereivel is megoldotta a feladatot.