I. A vizsgálandó kifejezést a képezési előírás alapján kifejezzük a sorozat-pár 1-gyel korábbi tagjaival:

$$x_k^2 - 3y_k^2 = (4-3)x_{k-1}^2 + (12-12)x_{k-1}y_{k-1} + (9-12)y_{k-1}^2 = \\ = x_{k-1}^2 - 3y_{k-1}^2.$$

Eszerint a kifejezés értéke minden k-ra annyi, mint az x_1, y_1 számpárra:

$$x_k^2 - 3y_k^2 = x_1^2 - 3y_1^2 = 1. \tag{2}$$

II. Sorozataink első 6–6 tagja:

$$\begin{array}{rrrrrr} k=1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6; \\ x_k=2, & 7, & 26, & 97, & 362, & 1351; \\ y_k=1, & 4, & 15, & 56, & 209, & 780; \end{array}$$

másrészt a $d = \sqrt{3} - 1$ számnak a 830. gyakorlatban talált lánctört kifejtése:

$$d = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \dots}}}}}. \tag{3}$$

Mivel (2)-ből

$$\left(\frac{x_k}{y_k}\right)^2 = 3 + \frac{1}{y_k^2}, \tag{4}$$

tehát x_k/y_k annál jobb (felső) közelítő értéket ad $\sqrt{3}$-ra, minél nagyobb y_k, így várható, hogy az ugyancsak $\sqrt{3}$-ra közelítő értéket adó d_j+1 közelítő törtek lesznek szoros kapcsolatban sorozatainkkal. Ezek az értékek $j = 1,\ 2,\ \dots,\ 12$-re

$$\frac{2}{1},\quad \frac{5}{3},\quad \frac{7}{4},\quad \frac{19}{11},\quad \frac{26}{15},\quad \frac{71}{41},\quad \frac{97}{56},\quad \frac{265}{153},\quad \frac{362}{209},\quad \frac{989}{571},\quad \frac{1351}{780},\quad \frac{3691}{2131}.$$

Látjuk, hogy a páratlan sorszámúak rendre megegyeznek az x_k/y_k hányadossal $k = 1,\ 2,\ \dots,\ 6$-ra. Ezekre a k értékekre tehát

$$d_{2k-1} = \frac{x_k}{y_k} - 1 = \frac{x_k - y_k}{y_k}. \tag{5}$$

Az itt a számlálóban fellépő különbségek szerepelnek mindig a megelőző $\left(d_{2(k-1)}\right)$ közelítő tört nevezőjében is. A páros sorszámú közelítő törtek számlálója pedig mindig 2-szerese az előző páratlan sorszámú közelítő tört nevezőjének, az y-sorozat megfelelő tagjának, pl. a $d_4 + 1 = 19/11$-ből adódó $d_4 = 8/11$-ben a számláló 2-szerese a d_3 nevezőjének. Végül azt is látjuk, hogy az $x_k - y_k$ különbség $k = 2$-től kezdve egyenlő az x és y sorozatok előző sorszámú tagjainak összegével:

$$7-4 = 2+1,\quad 26-15 = 7+4,\quad \dots,\quad 1351-780 = 362+209.$$

Ezek szerint a következő további összefüggéseket látjuk:

$$x_{k+1} - y_{k+1} = x_k + y_k, \qquad \text{ha } k = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5, \tag{6}$$

$$d_{2k} = \frac{2y_k}{x_k + y_k}, \qquad \text{ha } k = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6. \tag{7}$$

A (7) összefüggés felírásában már felhasználtuk (5)-öt. – Megmutatjuk, hogy ezek minden további (pozitív egész) k-ra érvényesek. (6) helyessége közvetlenül adódik (1)-ből, k helyére $k+1$-et írva:

$$x_{k+1} - y_{k+1} = (2x_k + 3y_k) - (x_k + 2y_k) = x_k + y_k.$$

Tegyük fel, hogy (5) érvényes a k indexre, írjunk a jobb oldalon k helyett $k+1$-et, és képezzük a kapott tört kifejezés lánctört kifejtését (1) figyelembevételével a harmadik nevezőig:

$$\frac{x_{k+1} - y_{k+1}}{y_{k+1}} = \frac{x_k + y_k}{x_k + 2y_k} = \cfrac{1}{\cfrac{x_k + 2y_k}{x_k + y_k}} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{y_k}{x_k + y_k}} = \\ = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cfrac{x_k + y_k}{y_k}}} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{x_k - y_k}{y_k}}} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + d_{2k-1}}}.$$

Az utolsó átalakításban felhasználtuk, hogy a második nevezőben az egész számhoz hozzáadandó kifejezés (5) jobb oldala. Az utolsó alak valóban a (3) lánctört-kifejtés $2k+1$-edik közelítő törtje: d_{2k+1}. Ezt ugyanis úgy kapjuk, hogy a $2k+1$-edik nevezőben elhagyjuk az egész számhoz hozzáadandó számot – pl. $d_1 = \frac{1}{1}$ –, másrészt rövidítve éppen a kapott utolsó alakban írhatjuk: az első két nevező kiírása után 1-es rész-nevező következik, a további rész-nevezők váltakozva 1 és 2, és számuk[1] $(2k+1)-2=2k-1$. Ha tehát (5) érvényes valamely k természetes számra, akkor a következő természetes számra is érvényes, azaz minden természetes számra.

Végül feltéve (7) érvényességét a k indexre, és a jobb oldalon k helyén $k+1$-et írva az előzőkhöz hasonlóan kapjuk, hogy (7) minden természetes k számra érvényes:

$$\frac{2y_{k+1}}{x_{k+1}+y_{k+1}} = \frac{2x_k+4y_k}{3x_k+5y_k} = \frac{1}{\dfrac{3x_k+5y_k}{2x_k+4y_k}} = \frac{1}{1+\dfrac{x_k+y_k}{2x_k+4y_k}} =$$

$$= \frac{1}{1+\dfrac{1}{\dfrac{2x_k+4y_k}{x_k+y_k}}} = \frac{1}{1+\dfrac{1}{2+\dfrac{2y_k}{x_k+y_k}}} = \frac{1}{1+\dfrac{1}{2+d_{2k}}} = d_{2(k+1)}.$$

Ezzel befejeztük annak bizonyítását, hogy megfigyeléseink minden k-ra érvényesek.

Herényi István (Budapest, I. István g. II. o. t.)

Megjegyzések. 1. A (4) összefüggés mutatja, hogy $x_k/y_k = d_{2k-1}+1$ fölülről közelíti meg $\sqrt{3}$-at. Hasonlóan adódik, hogy $d+1$ kifejtése páros indexű közelítő törtjeinek négyzetei mindig kisebbek 3-nál, de az eltérés k növekedésével csökken; (7) és (2) szerint ugyanis

$$3-(d_{2k}+1)^2 = 3-\left(\frac{x_k+3y_k}{x_k+y_k}\right)^2 = \frac{2(x_k^2-3y_k^2)}{(x_k+y_k)^2} = \frac{2}{(x_k+y_k)^2}.$$

2. Kapcsolatban áll feladatunk az 1219. feladattal is.[2] Eredményeinket alkalmasan felhasználva további egész oldalhármasokat írhatunk fel.

[1] Ezt a felismerést már a 830. gyakorlatban, c_3, c_4, d_3, d_4 kiszámításában felhasználtuk egyszerűsítésként.

[2] K.M.L. 27 (1963/11) 121.o.