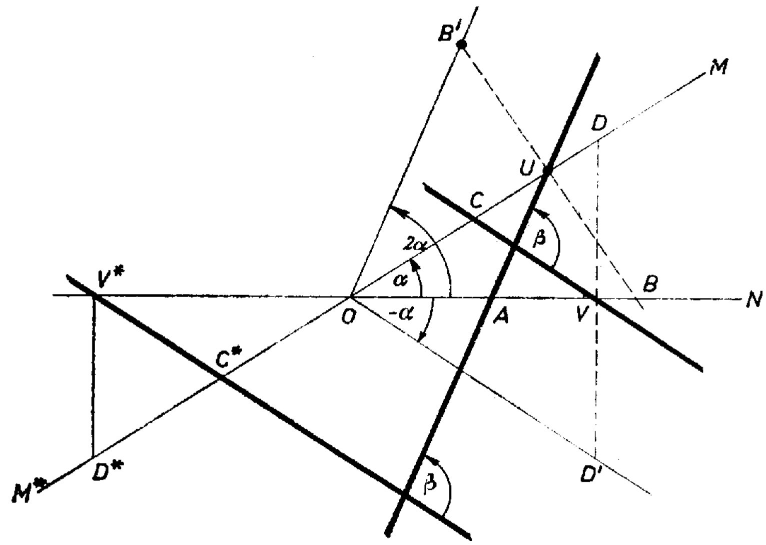
I. Vizsgáljuk először a kérdéses β szög változását abban az esetben, ha $a = MON\sphericalangle$ hegyes szög.



1. ábra

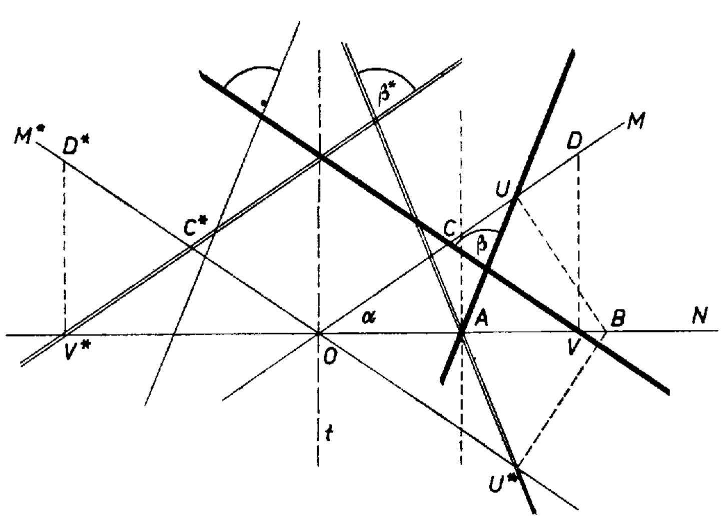
A feltételek azt jelentik, hogy A az OB szakasz felezőpontja, C pedig OD-é. Tükrözzük B-t az OM, D-t pedig az ON egyenesre, legyen a kép B', ill. D' (1. ábra). Így U felezi a BB' szakaszt, ezért AU az OBB' háromszög OB'-vel párhuzamos középvonala. Hasonlóan CV párhuzamos OD'-vel, ennélfogva az AU, CV egyenespár közti szögek egyállásúak az OB', OD' egyenespár közti szögekkel és így egyenlők velük.

Ámde OB' az ON egyenes tükörképe OM-re, és így ON-ből OB'-be 2α nagyságú forgás visz át – ugyanabban az irányban, amelyben OM fordult el ON-ből. OD' pedig OM tükörképe ON-re, és így ON-ből OD'-be ugyanakkora, de ellentétes irányú forgás visz át, mint ON-ból OM-be, vagyis OD' forgásszöge az ON alapiránytól mérve $-\alpha$. Ezek szerint OD'-ből OB'-be 3α nagyságú forgás visz át.

Amíg α $0°$-tól $90°$-ig növekszik, a 3α forgásszög $0°$-tól $270°$-ig vesz fel minden értéket. A vizsgálandó β szög viszont nem lehet nagyobb $90°$-nál. Amíg $0° \leq \alpha \leq 30°$, addig β egyenlő a 3α forgásszöggel. Amíg $30° < \alpha \leq 60°$, addig a forgásszög $90°$ és $180°$ közé esik, így β a kiegészítő szög, $\beta = 180° - 3\alpha$; ez $\alpha = 60°$ esetén $\beta = 0°$-ot ad. (Valóban, $\alpha = 60°$ esetén OB' és OD' egybeesnek, másrészt $OU = OB/2 = OA$, tehát OAU egyenlő oldalú háromszög, ugyanígy OCV is, így AU és CV párhuzamosak, és párhuzamos egyenesek szögét szokás $0°$-nak tekinteni, mivel irányuk megegyező.)

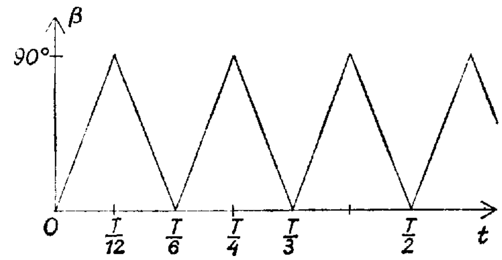
α-t $60°$-on túl növelve $90°$-ig, β mértékszámát úgy kapjuk, hogy a $180°$ és $270°$ közé eső forgásszögből $180°$-ot kivonunk: $\beta = 3\alpha - 180°$. Ez még $\alpha = 90°$ esetén is érvényes, hiszen akkor $U = V = O$, és így $\beta = 90°$. Ha viszont MO és ON egy egyenesbe esnek ($\alpha = 0°$ vagy $180°$), akkor AU és CV is egy egyenesbe esik és így $\beta = 0°$.

II. Nem volna nehéz látni, hogy meggondolásaink kiterjeszthetők minden α-ra, de áttekinthetőbb képet kapunk, ha belátjuk, hogy egyrészt α-nak egymást $180°$-ra kiegészítő értékeihez, másrészt két egymástól $180°$-kal különböző α értékhez ugyanakkora β érték tartozik. Egyszerűbb az utóbbi belátása. Az OM egyenes önmagába megy át, ha egy tetszés szerinti helyzetből $180°$-kal elforgatjuk, így U és AU helyzete változatlan; C, D új helyzete, C^*, ill. D^* az előbbinek tükörképe O-ra, így ugyanez áll a V pont és a CV egyenes új V^*, ill. C^*V^* helyzetére, ezért CV új helyzete párhuzamos a korábbival, így pedig az AU és CV egyenesek új helyzetei közti szögek egyenlők a korábbiakkal.



2. ábra

Legyen most α hegyesszög, $\alpha^* = M^*ON\sphericalangle = 180° - \alpha$, a C, D, U, V pontoknak megfelelő pontok C^*, D^*, U^*, V^*. Ekkor OM^*, C^*, D^* és V^* az OM, C, D, V tükörképe az O-n átmenő, ON-re merőleges t egyenesre (2. ábra). Másrészt, mivel az OM^* egyenes OM-ből ON-re való tükrözéssel is kapható, így U^* az U tükörképe ON-re, s ezzel együtt AU^* is AU tükörképe ON-re. Ekkor azonban AU és AU^* az ON-re A-ban állított merőlegesre is tükrösek, ha pedig egy ezzel párhuzamos tengelyre (pl. t-re) tükrözzük AU^*-t, AU-val párhuzamos egyenest kapunk. Így a β^* szöget t-re tükrözve egyik szára CV-be megy át, a másik párhuzamos lesz AU-val, tehát a tükörkép egyállású β-val, s így $\beta^* = \beta$; ezt akartuk belátni.



3. ábra

III. A β változásának grafikus ábrázolásához tudjuk, hogy OM az O körül állandó szögsebességgel forog, így α – és vele $\beta = 3\alpha$ is – a t idővel arányos, a kérdéses szög nagyságát ábrázoló grafikon első, a körülfordulás első 12-ed részéhez tartozó szakasza egyenes. Ennélfogva a 2. és 3. szakaszban $\beta = 180° - 3\alpha$, ill. $\beta = 3\alpha - 180°$ értékét is egyenesszakasz ábrázolja. Jelöljük OM teljes körülfordulásának az idejét T-vel. A teljes grafikont ezek után úgy kapjuk, hogy a $t = 0$-tól $t = T/4$-ig terjedő szakaszt a $t = T/4$ egyenesen tükrözzük, majd az így adódott ábrát $T/2$ szakasszal eltolva a $(T/2,\ T)$ számköz fölött megismételjük (3. ábra).

Major Péter (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., II. o. t.)