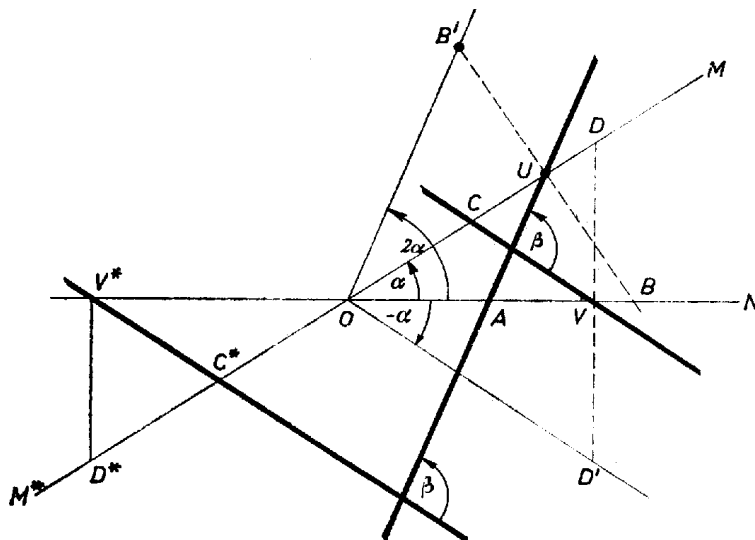


I. Vizsgáljuk először a kérdéses β szög változását abban az esetben, ha $a = \angle MON$ hegyes szög.



1. ábra

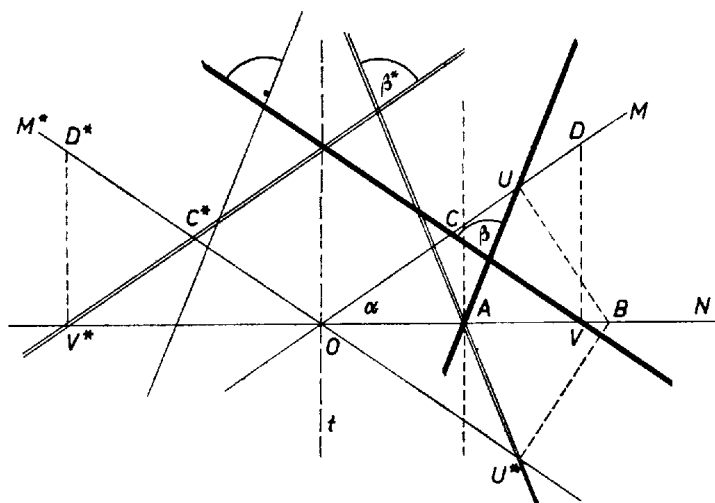
A feltételek azt jelentik, hogy A az OB szakasz felezőpontja, C pedig OD -é. Tükrözzük B -t az OM , D -t pedig az ON egyenesre, legyen a kép B' , ill. D' (1. ábra). Így U felezi a BB' szakaszt, ezért AU az OBB' háromszög OB' -vel párhuzamos középvonala. Hasonlóan CV párhuzamos OD' -vel, ennélfogva az AU , CV egyenespár közti szögek egyállásúak az OB' , OD' egyenespár közti szögekkel és így egyenlők velük.

Ámde OB' az ON egyenes tükrösképe OM -re, és így ON -ből OB' -be 2α nagyságú forgás visz át – ugyanabban az irányban, amelyben OM fordult el ON -ből. OD' pedig OM tükrösképe ON -re, és így ON -ből OD' -be ugyanakkora, de ellentétes irányú forgás visz át, mint ON -ből OM -be, vagyis OD' forgásszöge az ON alapiránytól mérve $-\alpha$. Ezek szerint OD' -ből OB' -be 3α nagyságú forgás visz át.

Amíg α 0° -tól 90° -ig növekszik, a 3α forgásszög 0° -tól 270° -ig vesz fel minden értéket. A vizsgálandó β szög viszont nem lehet nagyobb 90° -nál. Amíg $0^\circ \leq \alpha \leq 30^\circ$, addig β egyenlő a 3α forgásszöggel. Amíg $30^\circ < \alpha \leq 60^\circ$, addig a forgásszög 90° és 180° közé esik, így β a kiegészítő szög, $\beta = 180^\circ - 3\alpha$; ez $\alpha = 60^\circ$ esetén $\beta = 0^\circ$ -ot ad. (Valóban, $\alpha = 60^\circ$ esetén OB' és OD' egybeesnek, másrészt $OU = OB/2 = OA$, tehát OAU egyenlő oldalú háromszög, ugyanígy OCV is, így AU és CV párhuzamosak, és párhuzamos egyenesek szögét szokás 0° -nak tekinteni, mivel irányuk megegyező.)

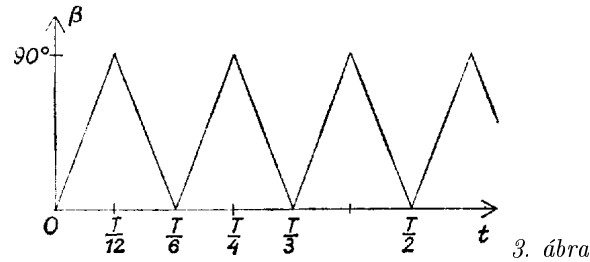
α -t 60° -on túl növelve 90° -ig, β mértékszámát úgy kapjuk, hogy a 180° és 270° közé eső forgásszögből 180° -ot kivonunk: $\beta = 3\alpha - 180^\circ$. Ez még $\alpha = 90^\circ$ esetén is érvényes, hiszen akkor $U = V = O$, és így $\beta = 90^\circ$. Ha viszont MO és ON egy egyenesbe esnek ($\alpha = 0^\circ$ vagy 180°), akkor AU és CV is egy egyenesbe esik és így $\beta = 0^\circ$.

II. Nem volna nehéz látni, hogy megfontolásaink kiterjeszthetők minden α -ra, de áttekinthetőbb képet kapunk, ha belátjuk, hogy egyrészt α -nak egymást 180° -ra kiegészítő értékeihez, másrészt két egymástól 180° -kal különböző α értékhez ugyanakkora β érték tartozik. Egyszerűbb az utóbbi belátása. Az OM egyenes önmagába megy át, ha egy tetszés szerinti helyzetből 180° -kal elforgatjuk, így U és AU helyzete változatlan; C , D új helyzete, C^* , ill. D^* az előbbinek tükrösképe O -ra, így ugyanez áll a V pont és a CV egyenes új V^* , ill. C^*V^* helyzetére, ezért CV új helyzete párhuzamos a korábbival, így pedig az AU és CV egyenesek új helyzetei közti szögek egyenlők a korábbiakkal.



2. ábra

Legyen most α hegyesszög, $\alpha^* = M^*ON \sphericalangle = 180^\circ - \alpha$, a C, D, U, V pontoknak megfelelő pontok C^*, D^*, U^*, V^* . Ekkor OM^*, C^*, D^* és V^* az OM, C, D, V tükörképe az O -n átmenő, ON -re merőleges t egyenesre (2. ábra). Másrészt, mivel az OM^* egyenes OM -ből ON -re való tükrözéssel is kapható, így U^* az U tükörképe ON -re, s ezzel együtt AU^* is AU tükörképe ON -re. Ekkor azonban AU és AU^* az ON -re A -ban állított merőlegesre is tükrösek, ha pedig egy ezzel párhuzamos tengelyre (pl. t -re) tükrözzük AU^* -t, AU -val párhuzamos egyenest kapunk. Így a β^* szöget t -re tükrözve egyik szára CV -be megy át, a másik párhuzamos lesz AU -val, tehát a tükörkép egyállású β -val, s így $\beta^* = \beta$; ezt akartuk belátni.



3. ábra

III. A β változásának grafikus ábrázolásához tudjuk, hogy OM az O körül állandó szögsebességgel forog, így α – és vele $\beta = 3\alpha$ is – a t idővel arányos, a kérdéses szög nagyságát ábrázoló grafikon első, a körülfordulás első 12-ed részéhez tartozó szakasza egyenes. Ennélfogva a 2. és 3. szakaszban $\beta = 180^\circ - 3\alpha$, ill. $\beta = 3\alpha - 180^\circ$ értékét is egyenesszakasz ábrázolja. Jelöljük OM teljes körülfordulásának az idejét T -vel. A teljes grafikont ezek után úgy kapjuk, hogy a $t = 0$ -tól $t = T/4$ -ig terjedő szakaszt a $t = T/4$ egyenesen tükrözzük, majd az így adódott ábrát $T/2$ szakasszal eltolva a $(T/2, T)$ számköz fölött megismételjük (3. ábra).

Major Péter (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., II. o. t.)