

Elég kiszámítani a négyzetgyökök közelítő értékét az első négy tizedes jegyig:

$$\sqrt{330} = 18,1659\dots; \quad \sqrt{230} = 15,1657\dots,$$

ezekből a különbség kisebb, mint

$$18,1660 - 15,1657 = 3,0003,$$

tehát ezredrészre kerekítve valóban 3,000.

Hasonló tulajdonságú számpárokat keresve megjegyezzük, hogy az adott négyzetgyökök egész része többszöröse 3-nak, közelítő értékük tört része közel áll $1/6 = 0,1666\dots$ -hoz, tehát a két négyzetgyöknek egy-egy közelítő értéke a

$$(1) \quad 3k + \frac{1}{6}$$

szám, ahol $k = 6$, ill. 5 . Figyelembe véve az 1211. feladat megoldását¹, azt sejtjük, hogy mindenestre megfelelő számpárt kapunk, ha a

$$\left(3k + \frac{1}{6}\right)^2 = 9k^2 + k + \frac{1}{36}$$

kifejezést – ahol k -t továbbra is egész számnak gondoljuk – egészre kerekítjük, az így kapott $9k^2 + k$ kifejezésbe egymás után behelyettesítjük a $k = 7, 8, 9, \dots$ számokat: 448, 584, 738, 910, 1100, \dots , és vesszük az így adódó számsorozat bármely két egymás utáni tagját.

Megmutatjuk, hogy e sorozat bármely két egymás utáni tagjának

$$(2) \quad \sqrt{9(k+1)^2 + (k+1)} - \sqrt{9k^2 + k}$$

különbsége valóban $1/1000$ -nél kevesebbel tér el 3-tól. A két tag egész része $3k$, ill. $3(k+1)$, ugyanis pl.

$$3k = \sqrt{9k^2} < \sqrt{9k^2 + k} < \sqrt{9k^2 + 6k + 1} = 3k + 1,$$

tehát az egész részek különbsége 3. További részük pedig mindig

$\frac{1}{6} - \frac{1}{1000}$ és $\frac{1}{6}$, azaz $0,165666\dots$ és $0,166666\dots$ közé esik, ugyanis (1)-nek és (2) második tagjának különbségére felső korlátot kapunk, ha a számlálót gyöktelenítjük, majd a nevező mindkét tagja helyett a kisebb $3k$ -t írjuk:

$$\left(3k + \frac{1}{6}\right) - \sqrt{9k^2 + k} = \frac{\left(3k + \frac{1}{6}\right)^2 - (9k^2 + k)}{3k + \frac{1}{6} + \sqrt{9k^2 + k}} < \frac{\frac{1}{36}}{3k + 3k} = \frac{1}{216k},$$

és ez a felső korlát $k \geq 6$ esetén kisebb $1/1000$ -nél. Így (2) tagjaiban az egész rész utáni részek egymástól való eltérése is kisebb $1/1000$ -nél. Ezzel állításunkat bebizonyítottuk.

Tetszés szerinti számú olyan számpárt kaptunk tehát, melyeknél szintén fennáll az adottakra kimondott tulajdonság. Egyébként a nyert sorozat szomszédos tagjainak már $k = 3$ -tól kezdve megvan a kérdéses tulajdonsága: $\sqrt{38} = 6,1644\dots$, $\sqrt{84} = 9,1651\dots$, $\sqrt{148} = 12,1655\dots$, az egész utáni részek különbsége az első kettő esetében még fölülte, az utóbbi kettőben már alatta van $5/10^4$ -nek.

Siket Aranka (Makó, József A. g. III. o. t.)

Megjegyzések. 1. A fenti számsorozat csupán egyike az alább vázolt megfontolás szerint nyerhető sorozatoknak, melyek egymás utáni szomszédos tag-párjai szintén egyre kisebb számmal térnek el a 3-tól. Legyen a, b természetes számpár és $\sqrt{a} - \sqrt{b} \approx 3$. Ekkor

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = \frac{a - b}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} \approx \frac{a - b}{3},$$

így a négyzetgyökök összegében az egész utáni résznek egy közelítő értéke $1/3$, vagy $2/3$, vagy 0, tehát

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = m + n/3,$$

ahol m természetes szám és $n = 0$, vagy 1, vagy 2. Így

$$(3) \quad \begin{aligned} (\sqrt{a} + \sqrt{b}) - (\sqrt{a} - \sqrt{b}) &= 2\sqrt{b} \approx (m - 3) + n/3, \\ \sqrt{b} &\approx p + \frac{q}{6}, \quad \sqrt{a} \approx p + 3 + \frac{q}{6}, \end{aligned}$$

¹K.M.L. 27 (1963/10) 59. o.; elolvasását a szerkesztőség ajánlotta a kitézéssel egyidejűen.

ahol p természetes szám és q az 1, 2, 3, 4, 5 számok egyike (kizártuk a $q = 0$ értéket, mert arra az érdektelen esetre vezet, melyben \sqrt{a} és \sqrt{b} egészek).

A fenti sorozat (3)-ból a $p = 3k$ és $q = 1$ esetben adódik, ha \sqrt{a} és \sqrt{b} négyzetét lefelé kerekítjük. Hasonlóan $p = 3k + 1$, és $q = 2$ esetén és felfelé kerekítéssel a és b a $9k^2 + 8k + 2$ (k egész) sorozat tagjai. A fentiekhez hasonlóan lehet általában bizonyítani, hogy a kívánt tulajdonság fennáll bármely szomszédos tagpárra, ha csak k -t nagyobbobbnak választjuk egy bizonyos értéknél (itt $k = 8$ -tól kezdve: $\sqrt{642} = 25,33771\dots$, $\sqrt{803} = 28,33725\dots$).

2. Nyilvánvaló, hogy nem adtunk meg minden megfelelő számpárt. Nagyobb x -eket véve a \sqrt{x} függvény növekedése kisebb mértékű, pl. 10^6 négyzete: 10^{12} után $2 \cdot 10^6 + 1$ egységgel következik az első négyzetszám, a tizedes vessző utáni rész változása is egyre lassúbb, ezért egy-két kezdő tizedes jegy megismétlődésében semmi váratlan nincs. Pl. $10^6 - 25/10^5$ és $10^6 + 25/10^5$ négyzetei: $10^{12} - 500 + 625/10^{10}$, ill. $10^{12} + 500 + 625/10^{10}$ között 1000 természetes szám van, és közülük 999 nem teljes négyzet, hasonlóan a $10^6 + 3 \pm 25/10^5$ számok négyzetei: $(10^6 + 3)^2 \pm 500 \pm 15/10^4 + 625/10^{10}$ között 1000 nem teljes négyzet van; véve mármost a gyanánt az utóbbiak, b gyanánt az előbbieket: 999 000 olyan a, b egész számpárt kaphatunk, melyekre $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ a $3 \pm 5/10^4$ számok közé esik, tehát ezredrészre kerekítve 3,000-t ad.