

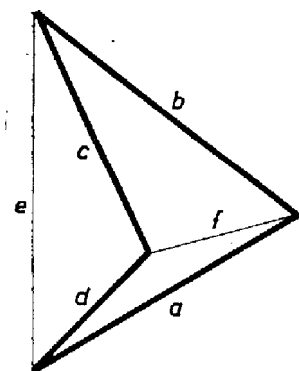
I. Mindegyik átló két háromszögre vágja szét a négyszöget. Ezekben a háromszög-egyenlőtlenség alapján az 1. ábra jelöléseit használva

$$\begin{aligned} a + b &> e, & a + d &> f, \\ c + d &> e, & b + c &> f. \end{aligned}$$

Adjuk össze az ugyanazon átlót tartalmazó 2–2 egyenlőtlenséget, majd szorozzuk az így adódó (nyilvánvalóan helyes) egyenlőtlenségeket a bennük szereplő átlóval. Az átló pozitív, tehát a szorzások után is helyes egyenlőtlenségeket kapunk:

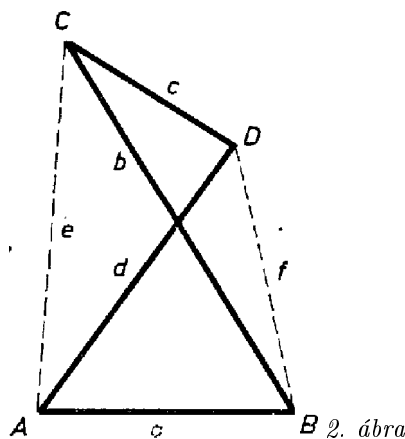
$$(a + b + c + d)e > 2e^2, \quad (a + b + c + d)f > 2f^2.$$

Az (1) állítás ezek összeadásával és kellő kiemelésekkel adódik.



1. ábra

Az állítás konkáv négyszögre is igaz, sőt hurkolt négyszögre is, az utóbbi esetben átlókon azokat a szakaszokat értve, melyeknek végpontjai a nem szomszédos A és C , ill. B és D csúcs-párok (2. ábra).



2. ábra

II. A $PQRST$ ötszög 3–3 egymás utáni csúcsával meghatározott háromszögeket 2–2 szomszédos ötszögoldal és egy átló határolja. Ezért

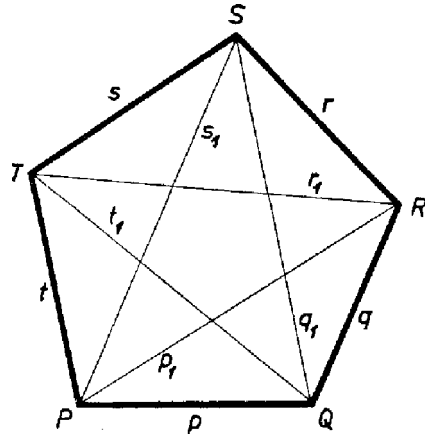
$$\begin{aligned} (3) \quad p + q &> p_1, & q + r &> q_1, & r + s &> r_1, \\ s + t &> s_1, & t + p &> t_1. \end{aligned}$$

Avégett, hogy megkapjuk az átlók négyzetösszegét, szorozzuk meg a felírt egyenlőtlenségek mindkét oldalát a jobb oldalukon szereplő átlóval, majd adjuk össze az így kapott egyenlőtlenségeket:

$$\begin{aligned} p_1(p + q) + q_1(q + r) + r_1(r + s) + s_1(s + t) + \\ + t_1(t + p) &> p_1^2 + q_1^2 + r_1^2 + s_1^2 + t_1^2. \end{aligned}$$

A végzett átalakításokkal mindig a bal oldalon kaptunk nagyobb számot, mert az átlók mértékszámai pozitívok. A bal oldalon kapott összeg azonos az állítás (2) kifejezésével, csupán alakban különböznek, itt ugyanis a bal oldal az átlók szerint van rendezve, (2) pedig az oldalak szerint. – Ezzel az állításokat bebizonyítottuk.

Legányi András (Tatabánya, Árpád g. I. o. t.)



3. ábra

Megjegyzés. Az ötszögre is kaphatunk az (1)-hez hasonló egyenlőtlenségeket, ha azt is felírjuk, hogy az 1–1 csúcs elhagyásával adódó négyszögekben a 3 egymás utáni ötszögoldal összege nagyobb, mint a szabad végpontjaikat összekötő átló. Pl. az $RSTP$ négyszögben

$$r + s + t > p_1,$$

ezt (3) első egyenlőtlenségével összeadva kapjuk, hogy az ötszög (bármelyik) átlója kisebb a k kerület felénél:

$$k > 2p_1, \quad p_1 < k/2.$$

Ezt mindegyik átlóra felírva kellő szorzás és összeadás után

$$k(p_1 + q_1 + r_1 + s_1 + t_1) > 2(p_1^2 + q_1^2 + r_1^2 + s_1^2 + t_1^2).$$