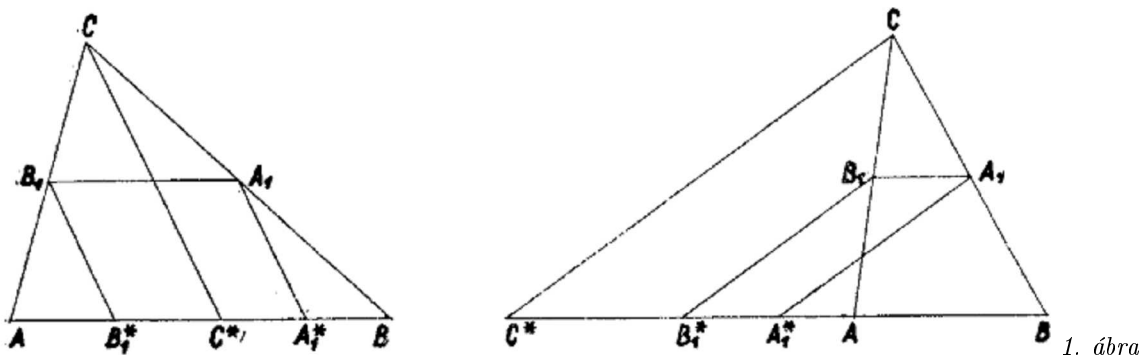


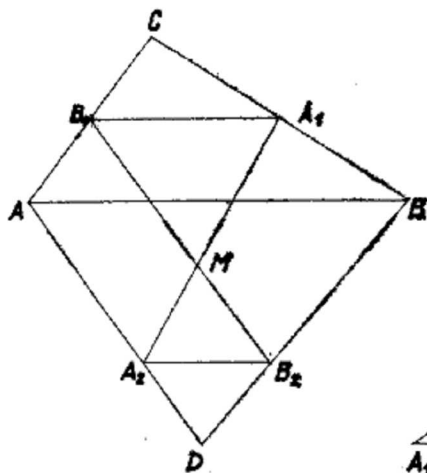


Vizsgáljuk az  $A_1A_2$  és a  $B_1B_2$  egyenesek metszéspontját.

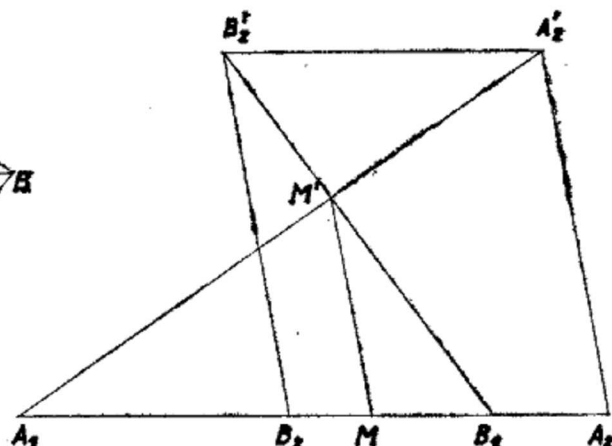
Az  $A_1B_1$  szakasz párhuzamos  $AB$ -vel, feleakkora és ellenkező irányú. Ez ismeretes, ha  $A, B, C$  nincsenek egy egyenesen; az  $AB$  egyenesen levő  $C^*$  pont esetén pedig válasszunk egy nem az  $AB$  egyenesen levő  $C$  pontot, ahhoz rajzoljuk meg az  $A_1$  és  $B_1$  pontokat (1. ábra). Ekkor  $A_1A_1^*$  és  $B_1B_1^*$  mint középvonalak a  $BCC^*$ , ill.  $ACC^*$  háromszögbeli, egy irányban párhuzamosak  $CC^*$ -gal, így  $A_1B_1B_1^*A_1^*$  paralelogramma, tehát  $A_1B_1$ -gyel együtt  $A_1^*B_1^*$  is (ami az  $AB$  egyenesen van) fele akkora, mint  $AB$ , és azzal ellenkező irányú.

Az  $A_2B_2$  szakasz  $AB$ -ből úgy keletkezik, hogy azt  $D$ -ből mint külső hasonlósági pontból  $1/3$  arányban kicsinyítjük, így  $A_2B_2$  is párhuzamos  $AB$ -vel, harmad akkora és egyező irányú vele.

Ezek szerint  $A_1B_1$  és  $A_2B_2$  párhuzamosak és ellenkező irányúak. Ha  $A_1B_1$  és  $A_2B_2$  nincs egy egyenesen, akkor  $A_1A_2$  és  $B_1B_2$  az  $A_1B_1$  és  $A_2B_2$  egyenesek közti síksávban metszi egymást (2. ábra),  $M$  metszéspontjukra  $A_1MB_1\Delta \sim A_2MB_2\Delta$ , a hasonlóság aránya  $A_1B_1/A_2B_2 = (AB/2)/(AB/3) = 3/2$ . Így  $M$  az  $A_1A_2$  és a  $B_1B_2$  szakaszt egyaránt  $3/2$  arányban osztja.



2. ábra



3. ábra

Ha az  $A_1, A_2, B_1, B_2$  pontok egy egyenesre esnek (3. ábra), akkor  $A_1A_2$  és  $B_1B_2$  metszéspontja határozatlan, de létezik egy egyértelműen meghatározott  $M$  pont, amely mindkét szakaszt  $3/2$  arányban osztja. Válasszunk ugyanis egy  $A_2B_2$ -vel párhuzamos, egyirányú és egyenlő  $A_2'B_2'$  szakaszt. Ekkor az előző megfontolás alapján belátható, hogy az  $A_1A_2'$  és  $B_1B_2'$  szakaszok  $M'$  metszéspontja mindkettőt  $3/2$  arányban osztja. Messe az  $M'$ -n át  $A_2A_2'$ -vel párhuzamosan húzott egyenes az  $A_1A_2$  egyenest  $M$ -ben. Mivel  $A_1MM'\Delta \sim A_1A_2A_2'\Delta$ , és  $B_1MM'\Delta \sim B_1B_2B_2'\Delta$ , így  $M$  az  $A_1A_2$  és  $B_1B_2$  szakaszt szintén  $3/2$  arányban osztja. – Világos, hogy ha  $A_1$  és  $A_2$ , vagy  $B_1$  és  $B_2$  egybeesik, akkor  $M$  is egybeesik velük.

Ha  $B, B_1, B_2$  szerepét rendre  $C, C_1, C_2$ -nek adjuk át, akkor megfontolásunk azt adja, hogy az  $A_1A_2$  és  $C_1C_2$  szakaszt  $3/2$  arányban osztó pont egybeesik, így az  $M$  pont az  $A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2$  szakaszok mindegyikét  $3/2$  arányban osztja,  $M$  tehát egyenesaik közös pontja. Azt is nyertük, hogy  $M$  az  $A_1, B_1, C_1$  és az  $A_2, B_2, C_2$  pontokból álló alakzatok hasonlósági pontja, az előbbi  $2/3$  arányú kicsinyítéssel és  $180^\circ$ -os elforgatással az utóbbiba megy át.

Nem határozott pl. az  $A_1A_2$  egyenes, ha  $A_2$  egybeesik  $A_1$ -gyel; ez bekövetkezik, ha  $D$  az  $AA_1$  szakasz  $A_1$ -en túli meghosszabbításán van és  $AD = 3AA_1/2$ . Ilyenkor  $B_1B_2$  és  $C_1C_2$  az egybeeső pontban metszik egymást, hiszen ezen át pl.  $AB$ -vel csak egy párhuzamos húzható, és azon  $A_1$  miatt rajta van  $B_1$ , és  $A_2$  miatt rajta van  $B_2$ .

Előfordulhat, hogy a vizsgálandó három egyenes nem mind különböző, ha pl.  $A, B, C$  nem mind különbözők, vagy ha  $A, B, C, D$  egy egyenes pontjai. Az ilyen esetek felsorolása felesleges, mert ilyenkor az állítás semmitmondó.

*Megjegyzés.* Nem jutunk a fentitől lényegesen különböző megoldáshoz, ha azt látjuk be, hogy az  $A_1B_1C_1$  és  $A_2B_2C_2$  háromszögek hasonlóak és hasonló helyzetűek. Ekkor azonban az egy egyenesen levő  $A$ ,  $B$ ,  $C$  pontok esete okoz egy kicsit több bonyodalmat. (Számos dolgozat ezzel az esettel nem foglalkozott.)

Nem nehéz belátni, hogy  $S$ -sel jelölve az  $ABC$  háromszög súlypontját,  $A_1D \parallel A_2S$  és  $B_1D \parallel B_2S$ , így az  $A_1B_1D$  és  $A_2B_2S$  is hasonló helyzetű háromszögek, hasonlósági pontjuk szintén  $M$ ; így  $S$ ,  $D$  és  $M$  (az  $ABC$  és  $A_1B_1C_1$ , ill.  $ABC$  és  $A_2B_2C_2$ , ill.  $A_1B_1C_1$  és  $A_2B_2C_2$  háromszögpárok hasonlósági pontjai) is egy egyenesen van. Az utolsó állítás akkor is igaz marad, ha  $ABC$ ,  $A_1B_1C_1$ ,  $A_2B_2C_2$  tetszős szerinti hasonló helyzetű háromszögek; bizonyítása azonban sokkal nehezebb.