I. megoldás. a) Messék az ABC háromszög A-nál levő szögét három egyenlő részre osztó egyenesek a BC oldalt A_1-ben és A_2-ben úgy, hogy A_2 az A_1 és C közt legyen.

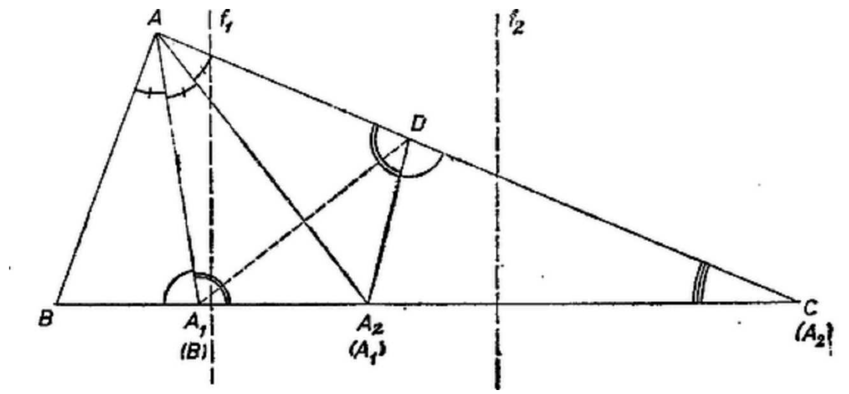
Az AA_1A_2 és AA_2A_1 szögek közül legalább az egyik, mondjuk az utóbbi, hegyesszög. Legyen A_1 tükörképe AA_2-re D. Ez az AC szakaszon van, és a keletkező A_2CD háromszögben

$$CDA_2\sphericalangle = 180^\circ - ADA_2\sphericalangle = 180^\circ - AA_1A_2\sphericalangle = AA_1B\sphericalangle > ACA_2,$$

mert az utolsó előtti szög az AA_1C háromszög külső szöge, s így nagyobb a nem mellette fekvő belső szögeknél. Így a szemben fekvő oldalakra

$$CA_2 > A_2D = A_2A_1,$$

a keletkező három szakasz tehát nem lehet egyenlő.



b) Ha $AA_1A_2\sphericalangle > 90^\circ$, tehát AA_1B hegyesszög, akkor az előbbi meggondolásban A_1, A_2, C helyére rendre B-t, A_1-et, A_2-t írva azt kapjuk, hogy $A_2A_1 > A_1B$, s így nem mindig a középső szakasz a legkisebb. Mivel $AA_1B\sphericalangle = 180^\circ - ABC\sphericalangle - \frac{1}{3}BAC\sphericalangle$, így nem a középső szakasz a legkisebb azokban a háromszögekben, amelyekre $ABC\sphericalangle + \frac{1}{3}BAC\sphericalangle > 90^\circ$, és hasonlóan azokban sem, amelyekre $ACB\sphericalangle + \frac{1}{3}BAC\sphericalangle > 90^\circ$. Amely háromszögben egyik feltétel sem teljesül, azokban a BC oldal középső szakasza egyik szélsőnél sem nagyobb.

Tényi Gusztáv (Budapest, Bláthy O. erősár. ip. t. II. o. t.)

II. megoldás. a) AA_1 felezi a BAA_2 szöget, így $BA_1 : A_2A_1 = BA : A_2A$, tehát $BA_1 = A_2A_1$ akkor és csak akkor áll fenn, ha $BA = A_2A$, továbbá hasonlóan $CA_2 = A_2A_1$ akkor és csak akkor, ha $CA = A_1A$. Az első egyenlőség a BA_2 szakaszt merőlegesen felező f_1 egyenes pontjaira áll fenn, a második az A_1C szakasz f_2 felező merőlegesének pontjaira, a két egyenlőség tehát nem állhat fenn egyszerre, mert A nem lehet rajta e két párhuzamos egyenesen egyszerre.

b) A meggondolás azt is adja, hogy ha A pl. BA_2 felező merőlegesének ugyanazon a partján van, mint B, akkor $AB < AA_2$, s így $BA_1 < A_1A_2$, tehát nem a középső szakasz a legkisebb. Nyilván ez a helyzet minden olyan háromszögnél, amelynek B-nél levő szöge legalább 90°.

Tihanyi László (Makó, József A. g. I. o. t.)