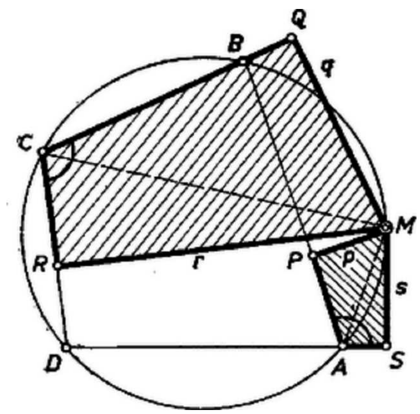
Legyen az $ABCD$ húrnégyszög köré írt kör egy pontja $M$. Ha $M$ egybeesik egy csúccsal, az egyenlőség nyilvánvalóan helyes, mindkét oldalán 0 áll. Más esetben választhatjuk a betűzést úgy, hogy $M$ a $C$, $D$ pontokat nem tartalmazó $AB$ körív belső pontja legyen.

Legyen $M$ vetülete az $AB$, $BC$, $CD$, $DA$ oldalegyenesen rendre $P$, $Q$, $R$, $S$, és $MP = p$, $MQ = q$, $MR = r$, $MS = s$. Megmutatjuk, hogy az $MPAS$ és $MQCR$ négyszögek hasonlók (1. ábra), csúcsaik a felsorolás rendjében felelnek meg egymásnak. Ha ez fennáll, akkor többek közt első és utolsó oldalaik aránya egyenlő:

$$p : s = q : r,$$

ami egyértelmű a feladat állításával.

Két négyszög hasonló, ha bármelyik megfelelő átlójukkal háromszögekre bontva a rész–háromszögek páronként hasonlók. Ez teljesül, ha egymás utáni szögeik egyenlők, továbbá egy–egy megfelelő csúcsukban az átló a megfelelő oldalakkal egyenlő szögeket zár be, – így ugyanis minden további megfelelő csúcspárban is fennáll az átló és az oldalak közti szögek egyenlősége.

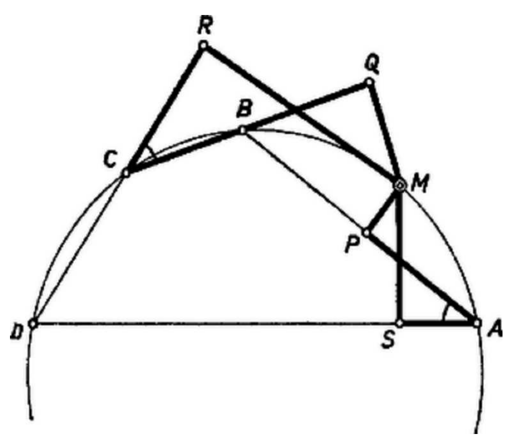


*1. ábra*

Az 1. ábrán a $PMSA$ és $QMRC$ négyszögekben a $P$, $S$, ill. a $Q$, $R$ csúcsnál derékszög van, az $A$-nál levő szög az $ABCD$ négyszög külső szöge, a $C$-nél levő szög pedig az $ABCD$ négyszögnek is szöge, így ezek is egyenlők, mert a négyszög húrnégyszög. Így a két négyszög $M$-nél levő szögei is egyenlők. Az előbbi meggondolást az $AMCD$ húrnégyszögre ismételve $MAS\sphericalangle = MCR\sphericalangle$, és így $MAP\sphericalangle = MCQ\sphericalangle$.

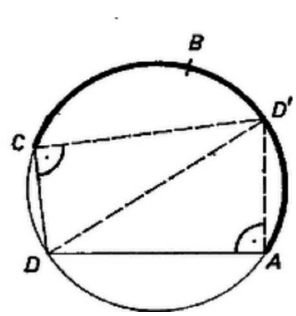
Ezzel az állítást a bemutatott helyzet esetére bebizonyítottuk.

*Szentiványi Béla* (Budapest, Rákóczi F. g. II. o. t.)

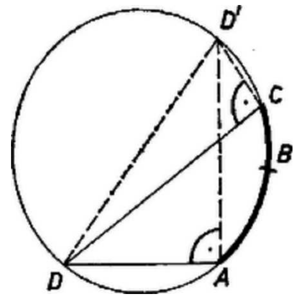


*2. ábra*

*Megjegyzés.* A 2. ábra helyzetében az $MPAS$ és az $MQCR$ négyszög hurkolt. A hasonlóság ezekre is fennáll. Itt a $MPAS$ négyszög $PAS$ szöge azonos az $ABCD$ négyszög $BAD$ szögével, viszont az $MQCR$ és $ABCD$ négyszögek $C$-nél levő szögei kiegészítő szögek.



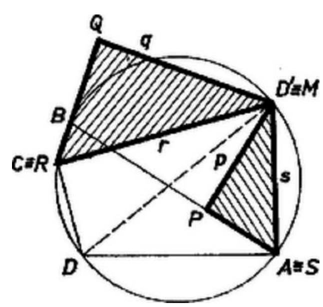
*3. ábra*



*4. ábra*

A fenti helyzetben is felhasználtuk, hogy a $PAS$ és a $QCR$ szögek egyike az $ABCD$ négyszögnek belső szöge, a másika pedig külső szög. Könnyű belátni, hogy nincs $M$ számára olyan helyzet, hogy a mondott szögek mindegyike belső szög, sem olyan, hogy mindkettő külső szög. Ugyanis mialatt $M$-et $A$-tól $B$-ig mozgatjuk a $D$-t nem tartalmazó $AB$ íven (3. ábra), $S$ addig marad $A$-nak ugyanazon oldalán, míg $M$ át nem lépi azt a $D'$ pontot, ahol az $AD$-re $A$-ban emelt merőleges metszi a mondott ívet. Az is lehetséges, hogy $S$ mindig ugyanazon oldalán adódik $A$-nak, ha ti. $D'$ nem tartozik hozzá a mondott $AB$ ívhez (4. ábra). $D'$ a $D$-ből kiinduló átmérő végpontja, és itt metszi a kört a $C$-ben $DC$-re emelt merőleges is, ezért $R$ szintén akkor lépi át $C$-t, amikor $M$ átlépi $D'$-t, vagy pedig egyáltalán nem lépi át $C$-t. Állításunk most már közvetlenül belátható a 3–4. ábrákról, amelyek $A$, $C$, $D$ és $D'$ kölcsönös helyzetének minden lehetséges típusát bemutatják ($A$ és $C$ ugyanis a vizsgált szempontból felcserélhetők); a $B$ és $M$ számára szóba jövő körív vastagon van rajzolva.

Ha végül $M$ azonos $D'$-vel (5. ábra), akkor $S \equiv A$, $R \equiv C$, $QRM\sphericalangle = PSM\sphericalangle$, és a feladat állítása a $QRM$ és $PSM$ derékszögű háromszögek hasonlóságából következik.



*5. ábra*