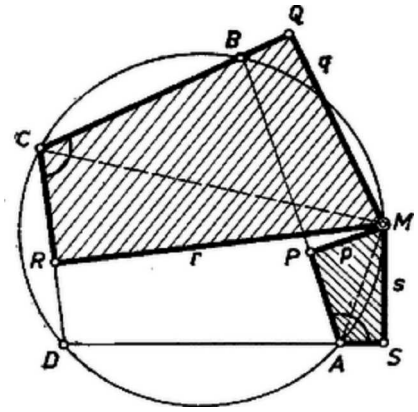
Legyen az $ABCD$ húrnégyszög köré írt kör egy pontja M. Ha M egybeesik egy csúccsal, az egyenlőség nyilvánvalóan helyes, mindkét oldalán 0 áll. Más esetben választhatjuk a betűzést úgy, hogy M a C, D pontokat nem tartalmazó AB körív belső pontja legyen.

Legyen M vetülete az AB, BC, CD, DA oldalegyenesen rendre P, Q, R, S, és $MP = p$, $MQ = q$, $MR = r$, $MS = s$. Megmutatjuk, hogy az $MPAS$ és $MQCR$ négyszögek hasonlók (1. ábra), csúcsaik a felsorolás rendjében felelnek meg egymásnak. Ha ez fennáll, akkor többek közt első és utolsó oldalaik aránya egyenlő:

$$p : s = q : r,$$

ami egyértelmű a feladat állításával.

Két négyszög hasonló, ha bármelyik megfelelő átlójukkal háromszögekre bontva a rész–háromszögek páronként hasonlók. Ez teljesül, ha egymás utáni szögeik egyenlők, továbbá egy–egy megfelelő csúcsukban az átló a megfelelő oldalakkal egyenlő szögeket zár be, – így ugyanis minden további megfelelő csúcspárban is fennáll az átló és az oldalak közti szögek egyenlősége.

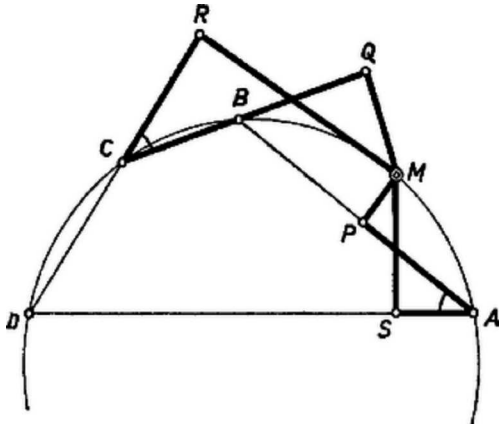


1. ábra

Az 1. ábrán a $PMSA$ és $QMRC$ négyszögekben a P, S, ill. a Q, R csúcsnál derékszög van, az A-nál levő szög az $ABCD$ négyszög külső szöge, a C-nél levő szög pedig az $ABCD$ négyszögnek is szöge, így ezek is egyenlők, mert a négyszög húrnégyszög. Így a két négyszög M-nél levő szögei is egyenlők. Az előbbi meggondolást az $AMCD$ húrnégyszögre ismételve $MAS\sphericalangle = MCR\sphericalangle$, és így $MAP\sphericalangle = MCQ\sphericalangle$.

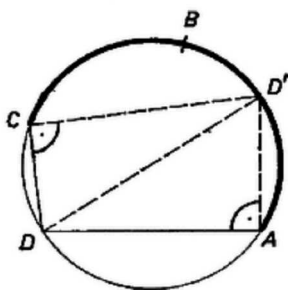
Ezzel az állítást a bemutatott helyzet esetére bebizonyítottuk.

Szentiványi Béla (Budapest, Rákóczi F. g. II. o. t.)

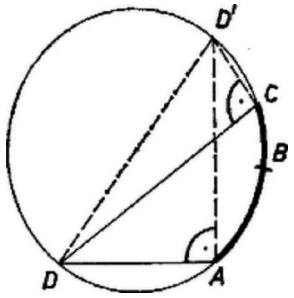


2. ábra

Megjegyzés. A 2. ábra helyzetében az $MPAS$ és az $MQCR$ négyszög hurkolt. A hasonlóság ezekre is fennáll. Itt a $MPAS$ négyszög PAS szöge azonos az $ABCD$ négyszög BAD szögével, viszont az $MQCR$ és $ABCD$ négyszögek C-nél levő szögei kiegészítő szögek.



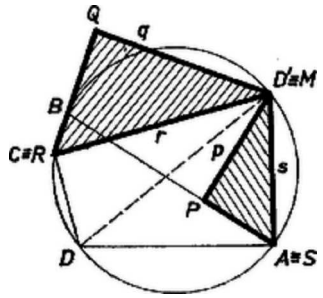
3. ábra



4. ábra

A fenti helyzetben is felhasználtuk, hogy a PAS és a QCR szögek egyike az $ABCD$ négyszögnek belső szöge, a másika pedig külső szög. Könnyű belátni, hogy nincs M számára olyan helyzet, hogy a mondott szögek mindegyike belső szög, sem olyan, hogy mindkettő külső szög. Ugyanis mialatt M-et A-tól B-ig mozgatjuk a D-t nem tartalmazó AB íven (3. ábra), S addig marad A-nak ugyanazon oldalán, míg M át nem lépi azt a D' pontot, ahol az AD-re A-ban emelt merőleges metszi a mondott ívet. Az is lehetséges, hogy S mindig ugyanazon oldalán adódik A-nak, ha ti. D' nem tartozik hozzá a mondott AB ívhez (4. ábra). D' a D-ből kiinduló átmérő végpontja, és itt metszi a kört a C-ben DC-re emelt merőleges is, ezért R szintén akkor lépi át C-t, amikor M átlépi D'-t, vagy pedig egyáltalán nem lépi át C-t. Állításunk most már közvetlenül belátható a 3–4. ábrákról, amelyek A, C, D és D' kölcsönös helyzetének minden lehetséges típusát bemutatják (A és C ugyanis a vizsgált szempontból felcserélhetők); a B és M számára szóba jövő körív vastagon van rajzolva.

Ha végül M azonos D'-vel (5. ábra), akkor $S \equiv A$, $R \equiv C$, $QRM\sphericalangle = PSM\sphericalangle$, és a feladat állítása a QRM és PSM derékszögű háromszögek hasonlóságából következik.



5. ábra