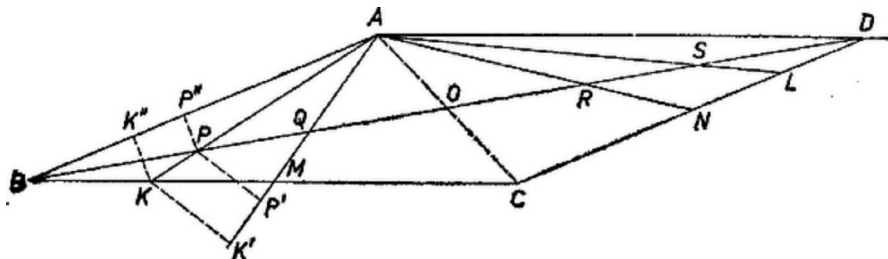


I. megoldás. Legyen a BM és ND szakasz felezőpontja K , ill. L , és messe a BD átlót az AK , AM , AN , AL egyenes rendre a P , Q , B , S pontban. A PBK és a PDA háromszögek hasonlóak, ebből

$$PB : PD = BK : DA = BK : BC = 1 : 4,$$

így BP a BD átlónak $1/5$ része.



Hasonlóan a QBM és QDA háromszögek hasonlóságából

$$QB : QD = BM : BC = 1 : 2,$$

így $BQ = BD/3$. Eszerint $PQ = BQ - BP = 2BD/15$. Ugyanígy látható, hogy $SD = BP = BD/5$, $RS = PQ = 2BD/15$, végül $QR = BD - BQ - RD = BD/3$.

Deák Jenő (Budapest, Kölcsey F. g. II. o.t.)

II. megoldás. Húzzuk meg a paralelogramma AC átlóját és jelöljük a felezőpontját O -val. Ekkor az ABC háromszögben AM és BO súlyvonalak, Q a súlypont, ezért $BQ = 2BO/3 = BD/3$. Hasonlóan $RD = BD/3$, és így $QR = BD/3$.

Az APQ és ABP háromszögek A -ból húzott magassága közös, ezért alapjaik $PQ : BP$ aránya megegyezik területeik arányával. A területeket a közös P csúsból húzott PP' , ill. PP'' magassággal fogjuk kifejezni. Húzzunk még K -ból is KK' ill. KK'' merőlegest AQ -ra, ill. AB -re. Ekkor a $PP'P''$ és $KK'K''$ háromszögek hasonlóak, mert az előbbit A -ból úgy nagyítva, hogy P a K -ba, P' pedig K' -be kerüljön, P'' az AP'' és a K -ból PP'' -vel párhozamosan húzott egyenes metszéspontjába kerül, ez pedig K'' . Így

$$PP' : PP'' = KK' : KK''.$$

Ezt felhasználva a PQ:BP arány így alakítható át:

$$\frac{PQ}{BP} = \frac{APQ}{APB} = \frac{AQ \cdot PP'}{AB \cdot PP''} = \frac{AQ \cdot KK'}{AB \cdot KK''} = \frac{2}{3} \cdot \frac{AM \cdot KK'}{AB \cdot KK''} = \frac{2}{3} \cdot \frac{AMK}{ABK} = \frac{2}{3}$$

(3 betű egymás után írásával a megfelelő háromszög területét jelöltük). Ismét felhasználtuk, hogy Q az ABC háromszög súlypontja, továbbá hogy az ABK és AKM háromszögek alapjai egyenlők, magasságuk közös. Eszerint $PQ = 2BQ/5 = 2BD/15$ és $BP = 3BQ/5 = BD/5$.

Béres László (Budapest, I. István g. III. o. t.)

Megjegyzés. M , ill. K helyett a BC oldal tetszés szerinti X pontját, továbbá az AX és BD egyenesek Y metszéspontját véve BY -t a fenti eljárással kifejezhetjük BD -vel és a $BX : XC = \lambda$ osztásarányal: $BY = \lambda \cdot BD / (2\lambda + 1)$. Az M pontra $\lambda = 1$, K -ra pedig $\lambda = 1/3$.

Ezen a módon a BC egyenes minden pontjához hozzárendelhető a BD egyenes egy pontja – kivéve C -nek B -re vett tükörképét, és BD minden pontjához BC egy pontja, kivéve D -t. A BC és BD egyeneseken levő pontsorok között rokonság jött létre.¹

V. L.

¹ Ezekről bővebben olvashat az érdeklődő a következő könyvben: *Vigassy Lajos: Geometriai transzformációk* (Tankönyvkiadó, Budapest, 1963)