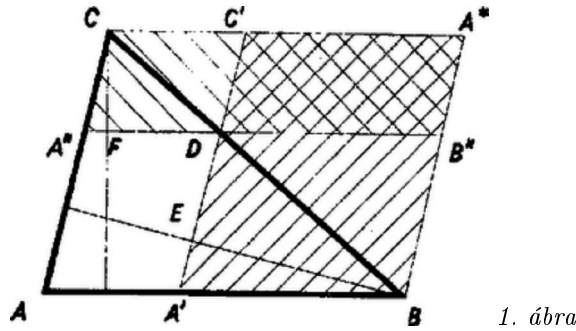


I. megoldás. Húzzunk párhuzamost B -n át AC -vel és C -n át AB -vel, és jelöljük metszéspontjukat A^* -gal. Az ABA^*C paralelogramma területe kétszer akkora, mint az ABC háromszögé, ezért elég azt belátnunk, hogy a kérdéses összeg megadja a paralelogramma területét.

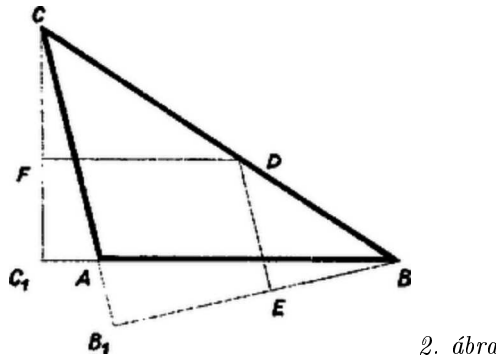


Húzzuk meg a DE egyenesnek a paralelogrammába eső szakaszát, legyen ennek végpontja az AB oldalon A' , a CA^* oldalon C' . (Ha az ABC háromszögben C -nél derékszög van, akkor E azonos D -vel, ekkor D -n át merőlegest húzunk BC -re, ami egyszersmind párhuzamos AC -vel.) Hasonlóan legyen a DF egyenesnek (ill. $CBD \angle = 90^\circ$ esetén a D -ben BC -re állított merőlegesnek) AC -vel, ill. BA^* -gal való metszéspontja A'' , ill. B'' . Nyilvánvaló, hogy $A''B''$ párhuzamos és egyenlő hosszú AB -vel, ugyanígy $A'C'' \parallel AC$. A CF szakasz az $A''B''A^*C$ paralelogramma magassága, ezért a szóban forgó $AB \cdot CF$ szorzat megadja ezen paralelogramma területét, az $AC \cdot BE$ szorzat pedig hasonlóan az $A'BA^*C'$ paralelogramma területét.

Mindkét paralelogramma lefedi az ABA^*C paralelogramma egy részét és abból nem nyúlik ki. Együttesen kétszer fedik le a $DB''A^*C'$ paralelogrammát, másrészt az ABA^*C paralelogrammából lefedetlenül hagyják az $AA'DA''$ paralelogrammát. Így elég belátnunk, hogy a kétszer fedett és a fedetlen paralelogramma területe egyenlő. Ez pedig következik abból, hogy e két paralelogramma az egyenlő területű A^*CB és ABC háromszögekből a $C'DC$ és $B''DB$ ill. az $A''DC$ és $A'BD$ háromszögek elhagyásával keletkezik, ezek pedig páronként egyenlő területűek, mert az $A''DC'C$, ill. $A'BB''D$ paralelogrammának a DC ill. BD átló mentén való kettévágásával keletkeznek.

Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

Kovács Piroska (Székesfehérvár, Teleki B. g. II. o. t.)



II. megoldás. DE párhuzamos AC -vel, mert mindkettő merőleges a B -ből húzott magasságvonalra, ezért a BDE háromszög hasonló BCB_1 -hez, ahol B_1 a B -ből húzott magasság talppontja. Így

$$(1) \quad BE = \frac{BD}{BC} \cdot BB_1, \quad \text{és}$$

$$(2) \quad AC \cdot BE = \frac{BD}{BC} \cdot AC \cdot BB_1 = \frac{BD}{BC} \cdot 2t,$$

ahol t az ABC háromszög területe. Ugyanígy

$$(3) \quad AB \cdot CF = AB \cdot CC_1 \frac{DC}{BC} = \frac{DC}{BC} \cdot 2t,$$

és a bizonyítandó állítás (2) és (3) összeadásával adódik, ugyanis D a BC oldal közbülső pontja, és így

$$\frac{BD}{BC} + \frac{DC}{BC} = 1.$$

Ha az ABC háromszögben pl. C -nél derékszög van, akkor $E \equiv D$, $B_1 \equiv C$, és (1) csak jelölésbeli változást jelent.

Eszter István (Pannonhalma, Benedek-rendi g. I. o. t.)

Megjegyzés. Az állítás a BC oldalegyenes bármely D pontjára érvényes; ha a CF , BE szakaszoknak előjelet tulajdonítunk, pozitívnak véve a felhasznált magasságegyeneseken a B -ből B_1 -be, ill. C -ből C_1 -be vivő irányt.