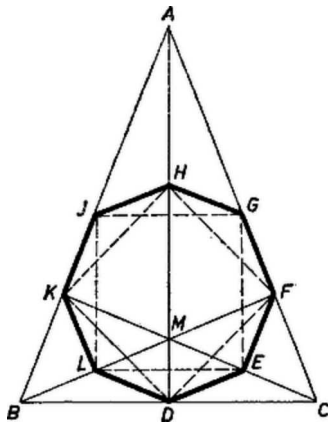


I. megoldás. Legyen az A, B, C csúcsból húzott magasság talppontja rendre D, F, K , a magasságpont M , az MA, MB, MC szakasz felezőpontja rendre H, L, E , végül az AB, AC szár felezőpontja J , ill. G . Be fogjuk látni, hogy ezek a $DEFGHJKL$ sorrendben egy szabályos nyolcszög egymás utáni csúcsai. A nyolcszög szimmetrikus a háromszög AD tengelyére, más szóval a HD átlóra, ezért szabályos voltának bizonyításához elég megmutatni, hogy egyrészt DE, EF, FG és GH oldalai egyenlők, másrészt a D, E, F és G csúcsnál levő szögei, 135° -osak.



A háromszög ACB szöge $67,5^\circ$ és az AKC derékszögű háromszögből $ACK\angle = 45^\circ$, ezért $KCB\angle = ECD\angle = 22,5^\circ$. CDM és CFM derékszögű háromszögek, ezért D és F a közös CM átfogó fölötti Thalész-kör pontjai. E kör középpontja E , tehát $DE = EF = EC = EM$; az ECD egyenlő szárú háromszögből egyrészt $EDC\angle = 22,5^\circ$, $MDE\angle = 67,5^\circ$, és így $LDE\angle = 2 \cdot MDE\angle = 135^\circ$, másrészt $CED\angle = 135^\circ$. A CEF egyenlő szárú háromszögből egyrészt $CFE\angle = 45^\circ$, és így $EFG\angle = 135^\circ$, másrészt $CEF\angle = 90^\circ$, ezért $DEF\angle = 360^\circ - DEC\angle - CEF\angle = 135^\circ$.

GE az ACM háromszög középvonala, így párhuzamos AM -mel, ezért $FGE\angle = CAD\angle = 22,5^\circ$, és így az EFG háromszögből $FEG\angle = 22,5^\circ$, ez a háromszög tehát egyenlő szárú, $FG = FE$.

GH ugyancsak középvonala az ACM háromszögnek, párhuzamos CM -mel. Ezért egyrészt $AGH\angle = ACK\angle = 45^\circ$ és így $FGH\angle = 135^\circ$, másrészt $EGHM$ paralelogramma, $GH = EM = ED$.

A kitűzött egyenlőségek fennállását beláttuk, a bizonyítást befejeztük.

Huhn Ágnes (Szeged, Tömörkényi I. lg. I. o. t.)

II. megoldás. Bebizonyítjuk, hogy $DFHK$ és $EGJL$ egybevágó négyzetek, körülírt körük közös, és a kör középpontja körüli 45° -os forgatással egymásba átvihetők. Ebből már következik, hogy $DEFGHJKL$ körbeírt nyolcszög, és minden oldalához 45° -os középponti szög tartozik, tehát a nyolcszög szabályos.

Az AFM és BFC derékszögű háromszögek egybevágók, mert oldalaik páronként merőlegesek, és így szögeik egyenlők, továbbá FM és FC befogók egyenlők, mert FMC derékszögű, egyenlő szárú háromszög. A két háromszög F körüli 90° -os forgatással egymásba megy át, eközben H és D , az átfogók felezőpontjai, egymásba mennek át, tehát $FH = FD$, és $DFH\angle = 90^\circ$. Eszerint DFH egyenlő szárú derékszögű háromszög, és a szimmetria miatt $DFHK$ négyzet. Oldalának hossza $DF = DC = BC/2$, mert F a BC szakasz fölötti Thalész-körön van.

Az $EGJL$ négyszög egymás utáni oldalai középvonalak az AMC, BCA, AMB , ill. BCM háromszögben, ezért rendre egyenlők az AM, BC, AM, BC szakasz felével, azaz egymással is, mert a fenti egybevágóság miatt $AM = BC$.

Másrészt rendre párhuzamosak a felsorolt szakaszokkal, tehát egymás utáni páronként merőlegesek egymásra, mert $AM \perp BC$. Így $EGJL$ valóban négyzet.

Az $EGJL$ négyzet köré írt kör átmegy F -en és K -n, mert F -ből a GL átmérő, K -ból az EJ átmérő derékszögben látszik. FK hossza a két négyzet egybevágósága miatt egyenlő a kör átmérőjével, így FK körünknek is átmérője, mert egy körben csak átellenes pontok vannak egymástól átmérőnyi távolságban. Így körünk a $DFHK$ négyzetnek is körülírt köre. Végül a DH átló párhuzamos az EG oldallal, tehát a két négyzet egymáshoz képest valóban 45° -kal van elfordulva.

Török László (Pannonhalma, Benedek-rendi g. II. o. t.)