

Meg kell keresnünk, hogy az adott mértékszámok közül melyik három a kérdéses háromszög oldala. A háromszög a , b , c oldalai és a hozzájuk tartozó s_a , s_b , s_c súlyvonalak között a következő összefüggések állnak fenn:¹

$$(1) \quad s_a^2 = \frac{-a^2 + 2b^2 + 2c^2}{4}, \quad s_b^2 = \frac{2a^2 - b^2 + 2c^2}{4}, \quad s_c^2 = \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4}.$$

Felhasználjuk továbbá, hogy az adott mértékszámok mindegyike egész.

Válasszuk a betűzést úgy, hogy s_a és s_b egészek, tehát a négyzetük is egész. Így

$$s_a^2 + s_b^2 = \frac{a^2 + b^2}{4} + c^2$$

egész, tehát $a^2 + b^2$ osztható 4-gyel. Így a is, b is páros, mert egy páros és egy páratlan szám négyzetösszege páratlan volna, két páratlan szám négyzetösszege pedig maradékosztva 2-t adna 4-gyel osztva, hiszen $(2k+1)^2 = 4k(k+1) + 1$.

a és b páros voltából következik, hogy c^2 is páros, mert az első összefüggést átrendezve:

$$c^2 = 2 \left(\frac{a^2}{4} - 2\frac{b^2}{4} + s_a^2 \right),$$

és a zárójelben mindegyik tag egész. Láttuk, hogy páratlan szám négyzete páratlan, így c csak úgy lehet egész, ha páros. Eszerint az adott mértékszámok közül csak 16, 18 és 22 lehetnek az oldalak.

Mármost $a = 22$, $b = 18$, $c = 16$ -tal $s_a = 13$, $s_b = 17$, ezek az adatok között szerepelnek, így s_c a keresett: $s_c = \sqrt{340} \approx 18,44$ egység.

Krassai Éva (Székesfehérvár, Teleki B. lg. II. o. t.)

Megjegyzések. 1. Tetszetős volna a megoldást így fejezni be: „Az (1) kifejezések összege így alakítható:

$$s_a^2 + s_b^2 + s_c^2 = 3 \left[\left(\frac{a}{2} \right)^2 + \left(\frac{b}{2} \right)^2 + \left(\frac{c}{2} \right)^2 \right] = 3(64 + 81 + 121) = 798.$$

Az ismert súlyvonalak négyzetösszege 458, tehát a harmadik súlyvonal négyzete 340.”

Éz azonban elvileg nem helyes. A háromszög meghatározására 5 adatunk volt, ha szerepüket nem pontosan ismertük is. Ellenőriznünk kellett, hogy a 3 oldal nyert kiválasztása megegyezésben van-e a további 2 adattal.

2. Kissé más úton is kiválaszthatók az oldalak mértékszámai. Mindegyik súlyvonal kisebb, mint a vele egy csúcsból kiinduló oldalak közül a nagyobbik, mert a súlyvonallal kettévágott háromszögnek a mondott nagyobbik oldalt tartalmazó részháromszögében az oldallal szemben tompaszög fekszik, egyenlő szárú háromszögben pedig derékszög. Ezért a legnagyobb adott mértékszám: 22, csak oldal lehet, legyen ez a . Ezzel az (1) kifejezésekből

$$s_a^2 = -121 + \frac{b^2 + c^2}{2}, \quad s_b^2 = 242 + \frac{2c^2 - b^2}{4}, \quad s_c^2 = 242 + \frac{2b^2 - c^2}{4},$$

és közülük legalább kettő egész. Ha b páratlan, akkor s_b^2 nem egész, ezért s_a^2 és s_c^2 egészek. Az első most csak páratlan c -vel egész, így viszont s_c^2 nem egész. Eszerint b nem lehet páratlan, és ugyanígy c sem.

Mátrai Miklós (Hódmezővásárhely, Bethlen G. g. II. o. t.)

¹Lásd pl. a 752. gyakorlatot, K. M. L. 25 (1962/11) 150. o.