

Az első egyenlet bal oldalának nevezője

$$(x+y)(x^2-xy+y^2) = (x+y) \left[ \left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3y^2}{4} \right],$$

a második tényező csak akkor 0, ha  $x = y = 0$ , ugyanígy a második egyenletben az  $x^4 + y^4$  nevező is. Ezt az értékpárt kizárjuk, ugyanígy azokat is, amelyekre  $x + y = 0$ . Mint ahogy

$$x^4 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2,$$

célszerű új ismeretlennek bevezetni az

$$(1) \quad x^2 + y^2 = u, \quad xy = v$$

kifejezéseket. Ezekkel egyenleteink némi átalakítás után

$$2u - 2v = 5, \quad 8u^2 - 16v^2 = 23u.$$

$v$  kiküszöbölésével

$$8u^2 - (4u - 10)^2 - 23u = -8u^2 + 57u - 100 = 0,$$

$$u_1 = \frac{25}{8}, \quad u_2 = 4, \quad \text{és így} \\ v_1 = \frac{5}{8}, \quad v_2 = \frac{3}{2}.$$

(1) átalakításával mindkét talált  $u, v$  értékpárhoz egy ilyen egyenletrendszer tartozik:

$$(x+y)^2 = u + 2v, \quad (x-y)^2 = u - 2v.$$

Véve mindkét egyenlet négyzetgyökét, elsőfokú egyenletrendszert kapunk  $x, y$ -ra:

$$x+y = \sqrt{u+2v}, \quad x-y = \sqrt{u-2v}, \quad \text{amiből} \\ x = \frac{1}{2} (\sqrt{u+2v} + \sqrt{u-2v}), \quad y = \frac{1}{2} (\sqrt{u+2v} - \sqrt{u-2v}).$$

Tekintettel a négyzetgyökök két értékére, másrészt a szimmetriára, az  $u_1, v_1$  értékpárból

$$x_1 = \frac{1}{8} (\sqrt{70} + \sqrt{30}), \quad y_1 = \frac{1}{8} (\sqrt{70} - \sqrt{30}), \\ x_2 = y_1, \quad y_2 = x_1; \quad x_3 = -x_1, \quad y_3 = -y_1; \quad x_4 = -y_1, \quad y_4 = -x_1,$$

és hasonlóan  $u_2, v_2$ -ből:

$$x_5 = \frac{1}{2} (\sqrt{7} + 1), \quad y_5 = \frac{1}{2} (\sqrt{7} - 1); \\ x_6 = y_5, \quad y_6 = x_5; \quad x_7 = -x_5, \quad y_7 = -y_5; \quad x_8 = -y_5, \quad y_8 = -x_5.$$

Egyik értékpárra sem áll fenn  $x + y = 0$ , így mind megoldása az egyenletnek.

*Pagony Mária* (Budapest, Berzsenyi D. lg. II. o. t.)