A megadott (0 és 1 közé eső) számokat

$$\frac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\ddots+\cfrac{1}{a_k}}} \tag{1}$$

alakú számokkal akarjuk megközelíteni, ahol az a_i-k természetes számok; így az utánuk következő törtek 1-nél kisebbek.

a) A $\sqrt{2}-1$ szám esetében az első nevezőben szereplő egésznek eszerint azt a legnagyobb egész számot, a nevező ún. *egész részét* kell választani, amely még nem nagyobb a szám reciprokánál, majd a kettő különbségével járni el hasonló módon:

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1, \qquad 2<\sqrt{2}+1<3.$$

Így az első közelítő tört 1/2, és

$$\sqrt{2}-1=\frac{1}{\cfrac{1}{\sqrt{2}-1}}=\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\frac{1}{2+(\sqrt{2}-1)}.$$

A nevezőben ismét $\sqrt{2}-1$ lépett fel maradéknak, így a 2-es szám fog vég nélkül ismétlődni:

$$\sqrt{2}-1=\frac{1}{2+(\sqrt{2}-1)}=\frac{1}{2+\cfrac{1}{2+(\sqrt{2}-1)}}=$$

$$=\frac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+(\sqrt{2}-1)}}}=\frac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+(\sqrt{2}-1)}}}}=\ldots$$

Világos, hogy az eljárás semelyik lépésnél sem fejeződhetik be. Ez igaz különben minden irracionális számra, hiszen egy (1) alakú szám közönséges törtté alakítható, tehát racionális szám, nem lehet egyenlő egy irracionális számmal.

A $c=\sqrt{2}-1$ szám első négy közelítő törtje

$$c_1=\frac{1}{2}, \qquad c_2=\frac{1}{2+\cfrac{1}{2}}=\frac{2}{5},$$

$$c_3=\frac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}=\frac{1}{2+c_2}=\frac{1}{2+\cfrac{2}{5}}=\frac{5}{12},$$

$$c_4=\frac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}}=\frac{1}{2+c_3}=\frac{1}{2+\cfrac{5}{12}}=\frac{12}{29}.$$

Tizedes alakban $c_1=0{,}5$, $c_2=0{,}4$, $c_3=0{,}4166\ldots$, $c_4=0{,}4137\ldots$, továbbá $c=0{,}4142\ldots$, ezek szerint

$$c_2<c_4<c<c_3<c_1,$$

vagyis a közelítő törtek váltakozva felülről és alulról közelítik c-t, egyre kisebb eltéréssel:

$$c_1-c<0{,}09, \qquad c-c_2<0{,}02, \qquad c_3-c<0{,}003, \qquad c-c_4<0{,}0006.$$

Célszerűbb azonban a közönséges tört alakot használni a becsléshez. A számláló gyöktelenítésével c_4-nek c-től való eltérése

$$c-c_4=\sqrt{2}-1-\frac{12}{29}=\frac{29\sqrt{2}-41}{29}=\frac{1}{29(29\sqrt{2}+41)},$$

pozitív, tehát

$$c_4<c, \qquad \frac{12}{29}<\sqrt{2}-1.$$

Ha ennek alapján az eltérés

$$\frac{1}{29\big[29(\sqrt{2}-1)+70\big]}$$

alakjában $29(\sqrt{2}-1)$-et a kisebb 12-vel pótoljuk, kisebb nevezőt veszünk, az eltérésnél nagyobb számot kapunk, más szóval az eltérésnek egy felső korlátját, amely racionális szám, könnyebben áttekinthető. A nevező tényezőinek további alkalmas csökkentésével kerek számot is adhatunk felső korlátnak:

$$c-c_4<\frac{1}{29(12+70)}<\frac{1}{25\cdot 80}=\frac{1}{2000}=0{,}0005.$$

b) Hasonlóan a

$$\sqrt{3}-1=\frac{2}{\sqrt{3}+1}=\frac{1}{\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}}$$

átalakításban $1<\sqrt{3}<2$ alapján a nevező egész része 1, és így

$$\sqrt{3}-1=\frac{1}{1+\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}}.$$

Az átalakítandó számot d-vel jelölve

$$d=\frac{1}{1+\dfrac{d}{2}}.$$

Írjuk a jobb oldali nevezőben fellépő d helyére a vele egyenlő jobb oldalt és ismételjük ezt, míg a kifejtésben négy törtvonalunk lesz:

$$d=\frac{1}{1+\dfrac{1}{2+d}}=\frac{1}{1+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{1+\dfrac{d}{2}}}}=\frac{1}{1+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2+d}}}}.$$

Látjuk, hogy az egymás utáni nevezők első tagja váltakozva 1 és 2; másrészt az eljárás ugyanazért nem fejeződhet be, mint az *a)* esetben.

Az első négy közelítő tört:

$$d_1=1,\qquad d_2=\frac{1}{1+\dfrac{1}{2}}=\frac{2}{3},\qquad d_3=\frac{1}{1+\dfrac{1}{2+d_1}}=\frac{3}{4},$$

$$d_4=\frac{1}{1+\dfrac{1}{2+d_2}}=\frac{8}{11}.$$

d-nek d_4-től való eltérése

$$d-d_4=\sqrt{3}-1-\frac{8}{11}=\frac{11\sqrt{3}-19}{11}=\frac{2}{11(11\sqrt{3}+19)}=$$

$$=\frac{2}{11\big[11(\sqrt{3}-1)+30\big]}$$

pozitív, ezért

$$d=\sqrt{3}-1>\frac{8}{11}=d_4,\qquad 11(\sqrt{3}-1)>8,\qquad \text{és ismét}$$

$$d-d_4<\frac{2}{11(8+30)}=\frac{1}{209}<\frac{1}{200}=0{,}005.$$

Valóban, a tizedes alakú $d=0{,}7320\ldots$ és $d_4=0{,}7272\ldots$ értékekből is $d-d_4<0{,}7321-0{,}7272=0{,}0049$.

Marosi Judit (Budapest, Berzsenyi D. lg. III. o. t.)