

I. megoldás. A feladatnak nincs megoldása, mert A egyik számjeggyel sem lehet egyenlő. Nem lehet $A < 4$, mert A^2 kétjegyű, sem $A = 5$, sem $A = 6$, mert ezek négyzete A jegyre végződik, holott A^2 egyes helyi értékű jegye az A -tól különböző E . Nem lehet $A = 7$, mert így A^2 -ből $E = 9$, viszont nincs olyan C^2 , melynek tízes helyi értékű jegye 9. Hasonlóan az $A = 4$ kiindulásból $E = 6$, így $C = 8$ és $F = 4$, holott $F \neq A$. Végül A -t 8-nak vagy 9-nek véve A , D , E , F és C csupa különböző jegyeknek adódik:

A	D	E	F	C
8	6	4	9	7
9	8	1	6	4

viszont a $\overline{DEEF EF}$ szám egyik esetben sem négyzetszám:

$$644\,949 = 9 \cdot 71\,661 = 3^3 \cdot 23\,887,$$

és itt a második tényező számjegyeinek összege 28, a tényező nem osztható 3-mal; ill.

$$811\,616 = 3 \cdot 270\,538 + 2,$$

holott négyzetszámot 3-mal osztva a maradék nem lehet 2, mert

$$(3k)^2 = 3 \cdot 3k^2 \quad \text{és} \quad (3k \pm 1)^2 = 3k(3k \pm 2) + 1.$$

Ezzel állításunkat bebizonyítottuk.

Székelly Gábor (Budapest, Madách I. g. II. o. t.)

II. megoldás. Az adatok szerint egyrészt

$$\overline{ABC^2} = \overline{DEEF EF} = \overline{DE} \cdot 10^4 + \overline{EF} \cdot 10^2 + \overline{EF} = 10^4 A^2 + 101 \cdot C^2,$$

másképp

$$\begin{aligned} \overline{ABC^2} &= (10^2 A + 10B + C)^2 = \\ &= 10^4 A^2 + 2 \cdot 10^3 A \cdot B + 10^2 B^2 + 2 \cdot 10^2 A \cdot C + 20B \cdot C + C^2. \end{aligned}$$

A két kifejezés egyenlőségéből rendezés és egyszerűsítés után

$$(1) \quad B \cdot C = 5(C^2 - B^2 - 20A \cdot B - 2A \cdot C).$$

Eszerint a $B \cdot C$ szorzat osztható 5-tel, tehát tényezőinek legalább az egyike osztható 5-tel, vagyis egyenlő 5-tel, vagy 0-val.

Nem lehet $C = 0$, mert C^2 kétjegyű, sem $C = 5$, mert ennek négyzete 5-re végződik, holott C^2 egyes helyi értékű jegye a C -től különböző F . Nem lehet $B = 5$ sem, mert így a zárójelben negatív szám áll, hiszen $C^2 < 100$, viszont $20A \cdot B = 100A \geq 100$, a bal oldalon pedig $B \cdot C$ nem lehet negatív. Az egyetlen maradék $B = 0$ lehetőség mellett (1)-ből $C^2 - 2AC = C(C - 2A) = 0$, ezért $2A = C < 10$, $A < 5$. Másrészt $A \geq 4$, mert A^2 kétjegyű. Ezeket egybevetve $A = 4$, $C = 8$, $D = 1$, $E = 6$, $F = 4 = A$, ami ki van zárva. Így a feladatnak nincs megoldása.

Herényi István (Budapest, I. István g. I. o. t.)

Megjegyzések. 1. Hasonlóan haladhatunk az ABC szám négyzetét a lépcsőző eljárással képezve:

A^2	D	E	.	.	.	.
$2 \cdot A \cdot B$	x	x	x	.	.	.
B^2			x	x	.	.
$2 \cdot \overline{AB} \cdot C$		x	x	x	x	.
C^2					E	F
	D	E	E	F	E	F

(az x -ek helyén jegyek állnak, a pontok helyén biztosan zérusok). Ugyanis az első két oszlopból $2AB < 10$, a tízes helyi értékű oszlopból pedig $2 \cdot \overline{AB} \cdot C$ osztható 10-zel.

Hirka Ferenc (Budapest, XVII., Szabadság sugárúti ált. isk. VIII. o. t.)

2. A II. megoldás $C = 2A$ összefüggése (1) átalakításából így adódik:

$$B(100A + 5B + C) = 5C(C - 2A).$$

A bal oldali zárójel értéke $A \geq 4$ miatt több mint 400. A jobb oldalon $C - 2A$ nem negatív, mert a bal oldal nem az. Így $C - 2A$ értéke legfeljebb 1, a jobb oldalé legfeljebb 45, tehát az egyenlőség csak $B = 0$ -val állhat fenn. Így $C \neq 0$, ezért a zárójelben $C = 2A$.

Horányi János (Budapest, Apáczai Csere J. gyak. g. II. o. t.)

3. Sok dolgozat a $408^2 = 166\,464$, $4^2 = 16$, $8^2 = 64$ megoldást adta meg, ezeket 3 pontra értékelte a szerkesztőség.