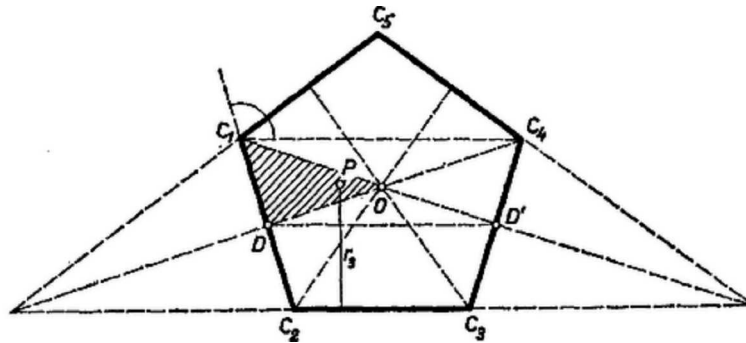


Legyen a  $C_1C_2C_3C_4C_5 = S$  szabályos ötszög középpontja  $O$ . Meghúzva a szimmetriatengelyeit,  $S$  feloszlik 10 derékszögű háromszögre. Közülük bármelyik kettő egymásba átvihető vagy egy  $O$  körüli forgatással, melynek szöge a  $72^\circ$ -nak egy egész számú többszöröse, vagy valamelyik szimmetriatengelyen való tükrözéssel. Ezért elég egyelőre az  $OC_1D$  háromszög belsejében vagy a kerületén levő  $P$  pontokra szorítkoznunk, ahol  $D$  a  $C_4O$  tengely és a  $C_1C_2$  oldal metszéspontja, egyben ezen oldal felezőpontja.



Megmutatjuk, hogy ekkor  $P$ -re nézve a  $C_2C_3$  oldaltól mért távolság mindig megadja  $r_3$ -at, vagyis van két másik a távolságok között, amelyek legfeljebb akkora, és kettő, amelyek legalább akkora, mint a  $C_2C_3$  oldaltól mért távolság.

A  $P$  pont távolsága  $C_2C_3$ -tól legalább akkora, mint  $C_1C_2$ -től és  $C_5C_1$ -től, ugyanis a  $C_1C_2C_3$  szög  $C_2O$  szögfelezőjének arra az oldalára esik, mint a  $C_1C_2$  szár, vagy a szögfelezőre (ha  $P = O$ ), másrészt a  $C_2C_3$  és  $C_1C_5$  oldalak közti szög  $C_4D$  szögfelezőjének arra az oldalára, mint a  $C_1C_5$  oldal, vagy a szögfelezőre.

Másrészt  $P$  távolsága  $C_2C_3$ -tól nem nagyobb, mint a  $C_3C_4$  és  $C_4C_5$  oldaltól mért távolsága, mert a  $C_2C_3C_4$  szög  $C_3O$  szögfelezőjének a  $C_2C_3$  szár felőli oldalára esik, vagy a felezőre; továbbá a  $C_2C_3$  és  $C_5C_4$  oldalak szögét felező  $C_1O$  egyenesnek is arra az oldalára, mint a  $C_2C_3$  szár, vagy a felezőre.

Azt kell még megvizsgálnunk, a  $C_1DO$  háromszög melyik pontja van legmesszebb és melyik legközelebb a  $C_2C_3$  oldalhoz.  $C_1$ -en és  $D$ -n át párhuzamost húzva  $C_2C_3$ -mal, az előbbi átmegy  $C_4$ -en, az utóbbi a  $C_3C_4$  oldal  $D'$  felezőpontján. A két egyenes közti sáv tartalmazza az  $O$  pontot, s így a  $C_1DO$  háromszöget, mert egyrészt

$$OC_1C_2 \sphericalangle = \frac{108^\circ}{2} = 54^\circ < C_4C_1C_2 \sphericalangle = 180^\circ - 108^\circ = 72^\circ,$$

másrészt

$$D'DC_2 = 180^\circ - 108^\circ = 72^\circ < ODC_2 = 90^\circ.$$

Eszerint a háromszög  $C_1$  csúcsa van legmesszebb és  $D$  csúcsa legközelebb  $C_2C_3$ -hoz, az utóbbi távolsága az előbbinek fele.

Most már  $P$  mindazon helyzetei, amelyekre  $r_3$  a lehető legnagyobb:  $S$  összes csúcsai, azok pedig, amelyekre  $r_3$  a lehető legkisebb:  $S$  összes oldalfelező pontjai.

Szabó Mihály (Makó, József A. g. II. o. t.)

*Megjegyzés.* A távolságokat az oldalak *egyeneseitől* mértük. – Egy pontnak egy *szakasztól* mért távolságán a szakasz hozzá legközelebbi pontjától mért távolságát értjük. Ha a pontnak a szakasz egyenesére való vetülete hozzátartozik a szakaszhoz, akkor a szakasztól való távolsága egyenlő az egyenestől való távolságával. Ha nem, akkor a szakasznak ahhoz a végpontjához van legközelebb a pont, amelyik közelebb van a vetületéhez. Könnyű belátni, hogy megállapításaink akkor is érvényesek, ha az  $r_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 5$ ) távolságokat  $S$  oldalszakaszaitól mérjük.