

I. megoldás. Jelöljük a kérdéses összeget S -sel.

Ha a kitöltésben nincs -1 -es szám, akkor a szorzat értéke minden sorban és oszlopban $+1$, így $S = 50$. Minden más esetben cseréljük ki egy -1 -es bejegyzést $+1$ -re és vizsgáljuk meg ennek kihatását S megváltozására. A megváltoztatott bejegyzés sorában a szorzat előjele megváltozik, így a szorzat értéke vagy $+1$ -ről -1 -re, vagy -1 -ről $+1$ -re változik, tehát vagy 2 -vel növekszik, vagy 2 -vel csökken. Ugyanez érvényes a megváltoztatott bejegyzés oszlopa számának szorzatára. Ha mindkét szorzat növekszik, vagy ha mindkettő csökken, akkor S változása 4 egység. Ha pedig egyik szorzat nőtt, a másik csökkent, akkor az új S érték a változtatás ellenére ugyanannyi mint az eredeti. Ezzel a sorbeli és oszlopbeli változási lehetőségek minden párját figyelembe vettük.

Táblázatunk -1 -es bejegyzéseit lépésről lépésre $+1$ -re cserélve S értéke – ha egyáltalán változik – mindig 4 -gyel változik és a -1 -esek elfogytával, mint láttuk, 50 lesz. Így S minden lehetséges értéke 50 -tól 4 valamilyen többszörösével különbözik, ezért 4 -gyel osztva ugyanannyi maradékot ad, mint 50 , vagyis 2 -t, nem lehet tehát 0 .

Bély Miklós (Győr, Révai M. g. I. o. t.)

II. megoldás. Az állítás érvényes minden olyan hasonlóan kitöltött négyzetes táblázatra, melyben a sorok és oszlopok száma $2k + 1$, páratlan szám. Tegyük fel, hogy van e táblázatnak olyan csupa $+1$ és -1 bejegyzésekből álló kitöltése, amelyben a sorok menti és az oszlopok menti szorzatok összege 0 , és jelöljük egy ilyen kitöltésben a $+1$ -es szorzatot adó sorok számát x -szel, a -1 -et adókat y -nal. Ekkor a $+1$ -es szorzatot adó oszlopok u száma egyenlő y -nal, a -1 -et adó oszlopok v száma pedig x -szel, mert u és v -re

$$\begin{aligned}u + v &= x + y = (2k + 1), \\u \cdot (+1) + v \cdot (-1) + x \cdot (+1) + y \cdot (-1) &= 0,\end{aligned}$$

és innen $u = y$, $v = x$.

Az x és y számok egyike páros, másika páratlan. Feltehetjük, hogy x páros, mert különben a táblázatnak az egyik átlóra vett tükörképére lesz páros a $+1$ -es szorzatot adó sorok száma, ti. $u = y$, ezzel a cserével viszont a kérdéses összeg nem változik meg.

Feltevésünk tarthatatlansága kiadódik abból, ha megmutatjuk, hogy a -1 -es bejegyzések számát a sorok szerint megállapítva páratlannak találjuk, az oszlopok szerint pedig párosnak. A $+1$ -es szorzatot adó vonalakon (azaz sorokon is, oszlopokon is) a -1 -es bejegyzések száma páros, a -1 -et adókon páratlan. Így a sorok szerinti számlálásban x , azaz páros számú páros összeadandót és y , azaz páratlan számú páratlan összeadandót összegezzünk, az első részletösszeg páros, a második páratlan, a végösszeg páratlan, mint állítottuk. A -1 -es bejegyzések oszlopok szerinti összeszámlálásában viszont egyrészt u , azaz páratlan számú páros összeadandót összegezzünk, másrészt v , azaz páros számú páratlan összeadandót, mindkét részletösszeg páros, tehát a -1 -es bejegyzések száma páros. Ezt akartuk megmutatni.

Nincs tehát a $(2k + 1) \times (2k + 1)$ -es táblázatnak olyan kitöltése az előírások mellett, melyben a szóban forgó összeg 0 .

Pelikán József (Budapest, Fazekas M. gyak. g. I. o. t.)

Megjegyzés: A gyakorlat állítása a kitöltési előírás megtartása mellett m sort és n oszlopot tartalmazó téglalap alakú táblázatra is igaz, hacsak az $m + n$ összeg nem osztható 4 -gyel. Mindkét megoldás gondolatmenete átvihető ennek az állításnak a bizonyítására is.

Lovász László (Budapest, Fazekas M. gyak. g. I. o. t.)