

I. megoldás. Olyan x, y, z, u pozitív egész számot keresünk, amelyekre

$$(1) \quad K = \sqrt{36 + 14\sqrt{6} + 14\sqrt{5} + 6\sqrt{30}} = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} + \sqrt{u} :$$

Négyzetre emeléssel

$$36 + 14\sqrt{6} + 14\sqrt{5} + 6\sqrt{30} = (x + y + z + u) + 2(\sqrt{xy} + \sqrt{xz} + \sqrt{xu} + \sqrt{yz} + \sqrt{yu} + \sqrt{zu}).$$

A jobb oldal első négytagúja egész, ezért vagy egyenlő 36-tal, vagy kisebb annál, ti. akkor, ha a második zárójel tagjai között is van egész:

$$x + y + z + u \leq 36.$$

Eszerint x, y, z, u egyike sem lehet több 33-nál, és bármelyik kettőjük összege nem lehet több 34-nél. Ezért a második zárójel egyik tagja sem lehet egyenlő a

$$14\sqrt{6} = 2\sqrt{294}, \quad 14\sqrt{5} = 2\sqrt{245}, \quad 6\sqrt{30} = 2\sqrt{270}$$

tagok egyikével sem, más szóval az $xy, xz, \dots, zu$ szorzatok egyike sem egyenlő a 294, 245, 270 számok valamelyikével. Ugyanis a $294 = 2 \cdot 3 \cdot 7^2$, $245 = 5 \cdot 7^2$, $270 = 2 \cdot 3^3 \cdot 5$ számok lehetséges kétféle szorzat-előállításai:

$$294 = 1 \cdot 294 = 2 \cdot 147 = 3 \cdot 98 = 6 \cdot 49 = 7 \cdot 42 = 14 \cdot 21,$$

$$245 = 1 \cdot 245 = 5 \cdot 49 = 7 \cdot 35,$$

$$270 = 1 \cdot 270 = 2 \cdot 135 = 3 \cdot 90 = 5 \cdot 54 = 6 \cdot 45 = 9 \cdot 30 = 10 \cdot 27 = 15 \cdot 18.$$

Ezek közül csak $15 \cdot 18$ -ban kisebb a tényezők összege 34-nél. Mármost az $x = 18, y = 15$ feltevésből $z + u \leq 3$ következik, ebből pedig

$$\text{vagy } z = u = 1, \quad \text{vagy } z = 2, \quad u = 1.$$

Ámde mindkét további feltevés ellentmondásra vezet; ugyanis az első esetben $2\sqrt{zu} = 2$, és így a racionális rész legalább 37, – a másodikban pedig $2\sqrt{zu} = 2\sqrt{2}$, márpedig a bal oldalon nincs $\sqrt{2}$ -nek egész számú többszöröse, a jobb oldalon viszont minden tag pozitív, a $2\sqrt{2}$ tag nem eshet ki. Ezek szerint a bal oldal mindegyik gyökös tagja a jobb oldal két gyökös tagjának összegével egyenlő. Ebből az is adódik, hogy $x + y + z + u = 36$.

Ha pl. $\sqrt{xy}$ és $\sqrt{xz}$ összevonható volna, akkor ez állna $\sqrt{y}$ és $\sqrt{z}$ -re is, így (1) jobb oldala 4-nél kevesebb tagból állna. Ezt a lehetőséget egyelőre figyelmen kívül hagyjuk, feltesszük, hogy az összevonható tagpárokból a gyökjelek alatt nincs azonos betű, tehát pl.

$$(2) \quad 2\sqrt{xy} + 2\sqrt{zu} = 14\sqrt{6},$$

$$(3) \quad 2\sqrt{xz} + 2\sqrt{yu} = 14\sqrt{5},$$

$$(4) \quad 2\sqrt{xu} + 2\sqrt{yz} = 6\sqrt{30}.$$

(2) és (3), majd (4) és (3) négyzeteinek különbségéből a gyökös tag kiesik. Egyszerűsítéssel, majd szorzattá alakítással

$$(5) \quad xy + zu - xz - yu = 49,$$

$$(x - u)(y - z) = 49;$$

$$xu + yz - xz - yu = 25,$$

$$(6) \quad (x - y)(u - z) = 25.$$

Feltehetjük, hogy $x > u$, ekkor (5)-ből $y > z$, és mivel $x - u$ nem lehet 49, azért $x - u = y - z = 7$. Innen $x - y = u - z$, tehát (6) szerint közös értékük +5, vagy -5. Feltehetjük, hogy $x > y$, így $x - y = 5$. E három független egyenlethez hozzávéve $x + y + z + u = 36$ -ot, adódik: $x = 15, y = 10, u = 8, z = 3$.

Ezek pozitív egész számok, megfelelnek a követelményeknek és valóban fennáll

$$\sqrt{36 + 14\sqrt{6} + 14\sqrt{5} + 6\sqrt{30}} = \sqrt{15} + \sqrt{10} + \sqrt{8} + \sqrt{3}$$

(a két oldal közelítő értéke 11,5957).

Szentai Judit (Budapest, Kanizsay D. lg. II. o. t.)

II. megoldás. Vegyük észre, hogy a gyök alatti K kifejezés szorzattá alakítható:

$$\begin{aligned} K &= 6(6 + \sqrt{30}) + 14(\sqrt{6} + \sqrt{5}) = 6\sqrt{6}(\sqrt{6} + \sqrt{5}) + 14(\sqrt{6} + \sqrt{5}) = \\ &= (6\sqrt{6} + 14)(\sqrt{6} + \sqrt{5}), \end{aligned}$$

így a keresett négyzetgyök egyenlő e két kéttagú számkifejezés négyzetgyökének szorzatával. Alkalmazzuk az elsőre az ismert¹ (és könnyen igazolható)

$$\sqrt{\sqrt{A} + \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{\sqrt{A} + \sqrt{A-B}}{2}} + \sqrt{\frac{\sqrt{A} - \sqrt{A-B}}{2}}$$

azonosságot: $A = 216$, $B = 196$, $A - B = 2^2 \cdot 5$, és így

$$\sqrt{6\sqrt{6} + 14} = \sqrt{3\sqrt{6} + \sqrt{5}} + \sqrt{3\sqrt{6} - \sqrt{5}},$$

ezért, majd az azonosságot újból alkalmazva

$$\begin{aligned} K &= \left(\sqrt{3 + \sqrt{6} + \sqrt{5}} + \sqrt{3\sqrt{6} - \sqrt{5}} \right) \cdot \sqrt{\sqrt{6} + \sqrt{5}} = \\ &= \sqrt{23 + 4\sqrt{30}} + \sqrt{13 + 2\sqrt{30}} = \sqrt{\frac{23 + \sqrt{529 - 480}}{2}} + \sqrt{\frac{23 - \sqrt{49}}{2}} + \\ &+ \sqrt{\frac{13 + \sqrt{169 - 120}}{2}} + \sqrt{\frac{13 - \sqrt{49}}{2}} = \sqrt{15} + \sqrt{8} + \sqrt{10} + \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Lehel Csaba (Budapest, Apáczai Csere J. gyak. g. II. o. t.)

III. megoldás. Vegyük segítségül az

$$L = \sqrt{36 + 14\sqrt{6} - 14\sqrt{5} - 6\sqrt{30}}$$

számkifejezést. Ezzel

$$\begin{aligned} (K + L)^2 &= K^2 + L^2 + 2KL = 72 + 28\sqrt{6} + \\ &+ 2\sqrt{(36 + 14\sqrt{6})^2 - (14\sqrt{5} + 6\sqrt{30})^2} = 72 + 28\sqrt{6} + 4\sqrt{103 + 42\sqrt{6}}. \end{aligned}$$

Próbáljuk meg az utolsó tagbeli gyököt egész C , D -vel $C + D\sqrt{6}$ alakban előállítani:

$$(7) \quad \sqrt{103 + 42\sqrt{6}} = C + D\sqrt{6}, \quad C^2 + 6D^2 = 103, \quad CD = 21,$$

és látjuk, hogy $C = 7$, $D = 3$, megfelel, így – csak a pozitív gyököt véve, úgyszintén a továbbiakban is –

$$(K + L)^2 = 72 + 28\sqrt{6} + 28 + 12\sqrt{6} = 100 + 40\sqrt{6} = 20(5 + 2\sqrt{6}).$$

Észrevéve, hogy a zárójelben $5 = 2 + 3$ és $6 = 2 \cdot 3$:

$$(K + L)^2 = 20(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2, \quad K + L = 2\sqrt{5}(\sqrt{2} + \sqrt{3}) = 2\sqrt{10} + 2\sqrt{15}.$$

Hasonló átalakítás sikerül $K - L$ -re. Az előzők felhasználásával

$$\begin{aligned} (K - L)^2 &= K^2 + L^2 - 2KL = 72 + 28\sqrt{6} - 28 - 12\sqrt{6} = 44 + 16\sqrt{6} = \\ &= 4(11 + 2\sqrt{24}) = 4(\sqrt{3} + \sqrt{8})^2, \quad K - L = 2\sqrt{3} + 2\sqrt{8}. \end{aligned}$$

Ezzel egyenletrendszert kaptunk K -ra és L -re, abból

$$K = \frac{1}{2}[(K + L) + (K - L)] = \sqrt{10} + \sqrt{15} + \sqrt{3} + \sqrt{8}.$$

Azt is kapjuk, hogy az L kifejezés is előállítható összeadással és kivonással négy pozitív egész szám négyzetgyökéből:

$$\begin{aligned} \sqrt{36 + 14\sqrt{6} - 14\sqrt{5} - 6\sqrt{30}} &= \frac{1}{2}[(K + L) - (K - L)] = \\ &= \sqrt{10} + \sqrt{15} - \sqrt{3} - \sqrt{8}. \end{aligned}$$

Hasonlóan segítségül vehettük volna a következő kifejezéseket

$$\begin{aligned} \sqrt{36 + 6\sqrt{30} - 14\sqrt{6} - 14\sqrt{5}} &= \sqrt{15} + \sqrt{8} - \sqrt{10} - \sqrt{3} \quad \text{és} \\ \sqrt{36 + 14\sqrt{5} - 14\sqrt{6} - 6\sqrt{30}} &= \sqrt{10} + \sqrt{8} - \sqrt{15} - \sqrt{3}; \end{aligned}$$

a legutóbbi eredmény számítása a bemutatottnál egyszerűbb.

¹Lásd pl. *Faragó L.*: Matematikai szakköri feladatgyűjtemény (2. kiadás, Tankönyvkiadó, Budapest 1955) 60. fd. 13. o. *Laricsev–Varga*: Algebrai feladatok gyűjteménye: II. (10. kiadás, Tankönyvkiadó, Bp. 1961.) 37. o.