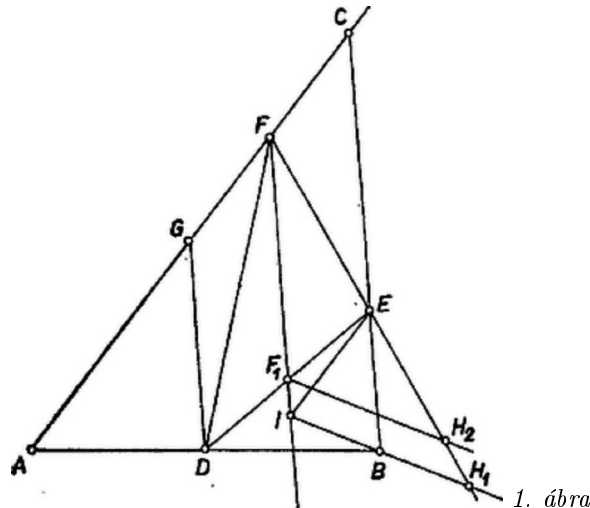


I. megoldás. Képzeljük a feladatot megoldottnak. Megmutatjuk, hogy az F -en át BC -vel párhuzamosan húzott egyenes felezi a DE szakaszt. Jelöljük ki az AC oldal G felezőpontját és DE -n az F_1 felezőpontot. Ekkor F a CG felezőpontja, továbbá DG az ABC háromszög középvonala, így párhuzamos BC -vel. Ennek folytán a $CEDG$ négyszög trapéz és FF_1 a középvonala, tehát párhuzamos BC -vel.



Mivel az F ponton át BC -vel párhuzamosan húzott egyenes egyértelműen meg van határozva, így ha fordítva járunk el: F -en át húzunk párhuzamost BC -vel, akkor is annak a DE szakasz F_1 felezőpontján kell átmennie.

A középvonalak hosszára vonatkozó összefüggések alapján FF_1 hosszából meg tudjuk határozni CE hosszát.

$$DG = \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot CE = \frac{3}{4} CE \quad \text{és}$$

$$FF_1 = \frac{1}{2} (DG + CE) = \frac{7}{8} CE, \quad \text{azaz} \quad CE = \frac{8}{7} FF_1.$$

Ennek alapján meg tudjuk határozni C -t, abból B -t, majd CF és BD metszéspontjaként A -t. Pl. a következőképpen járhatunk el (előrebocsátjuk, hogy D, E, F egy háromszög oldalainak belső pontjai, így nem lehetnek egy egyenesen).

Szerkesszük meg DE -n az F_1 felezőpontot, FE -nek E -n túli meghosszabbítására pedig mérjük rá az $EH_1 = EF$ és $EH_2 = \frac{3}{4} EF$ távolságot. Legyen a H_1 -en át H_2F_1 -gyel párhuzamosan húzott egyenes és az FF_1 egyenes metszéspontja

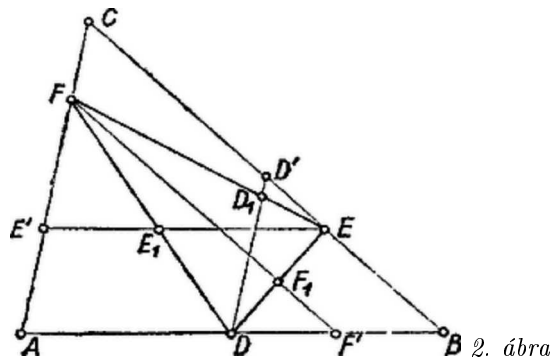
I . Ekkor $FI = \frac{8}{7} FF_1$. Szerkesszük meg az ezzel egyenlő és párhuzamos EC szakaszt a DE egyenesnek azon az oldalán, amelyiken F van. Legyen a szakasz meghosszabbításának metszéspontja H_1I -vel B . Ekkor EB az FH_1I háromszög középvonala, így az $FI = CE$ szakasz felével egyenlő. E tehát a BC szakasz B felőli harmadoló pontja. A -t úgy kapjuk, mint BD és CF metszéspontját.

Messe a D -n át BC -vel párhuzamosan húzott egyenes AC -t G -ben. A $CEDG$ trapéz FF_1 középvonalára $(DG + CE)/2 = FF_1$ innen

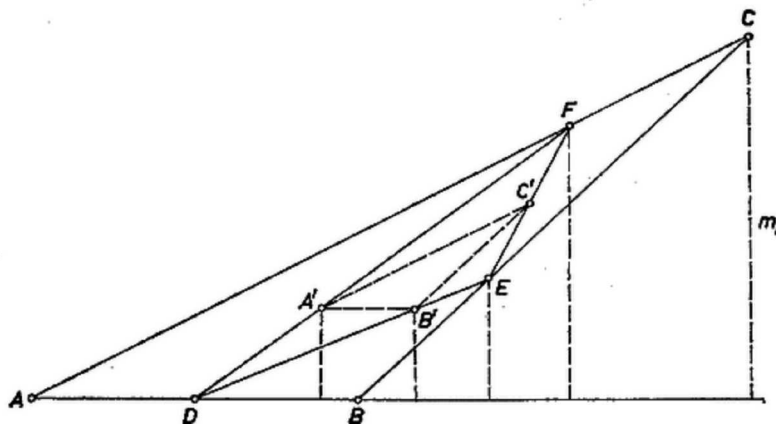
$$DG = 2FF_1 - CE = \left(2 \cdot \frac{7}{8} - 1\right) CE = \frac{3}{4} CE = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} BC = \frac{1}{2} BC,$$

DG tehát az ABC háromszög középvonala, D és G az AB és AC oldalak felezőpontja, F pedig a CA oldal C -hez közelebbi negyedelő pontja. Ezzel a szerkesztés helyességét bebizonyítottuk.

A szerkesztés minden lépése egyértelmű. A háromszög létrejön, a BD és CF egyenesek ugyanis nem párhuzamosak, mert $CF \parallel EI$ és I a DE egyenesnek ugyanarra az oldalára esik, mint B , a BE egyenesnek pedig ugyanarra az oldalára, mint D . Ebből következik, hogy az EI egyenes a BED szögtartományban halad, tehát metszi a B -ből D -n át húzott félegyenest.



Megjegyzés. Meghatározhatnánk F_1 -éhez hasonlóan annak a D_1 , ill. E_1 pontnak az osztásarányát a DEF háromszög kerületén, amelyet a D -n át AC -vel, ill. E -n át AB -vel párhuzamosan húzott egyenes metsz ki a szemközti EF , ill. FD oldalból ($ED_1 : EF = 1 : 4$, $FE_1 : FD = 5 : 9$). Ennek alapján megszerkeszthetnénk a három oldal irányát és ebből a keresett háromszöget. Az így adódó szerkesztés helyességének igazolása azonban lényegesen bonyolultabb lenne, mint a föntié. Számos versenyző az utóbbi eljárást adta meg – igazolás nélkül.



3. ábra

II. megoldás (részlet). Osszuk ketté az ED szakaszt a B' ponttal a CA oldalra előírt arányban, vagyis legyen $EB' : ED = CF : CA = 1/4 = z$, továbbá a DF oldalt az A' ponttal a BC oldalra előírt arányban: $DA' : DF = BE : BC = 1/3 = y$. Ekkor $A'B'$ párhuzamos AB -vel. Ugyanis A' -nek AB -től való távolsága y -szor akkora, mint F távolsága AB -től, ez pedig $(1-z)$ -szerese az ABC háromszög m_c magasságának, tehát A' távolsága $y(1-z)m_c$, másrészt hasonlóan ugyanezt a kifejezést kapjuk B' -nek AB -től való távolságára. Ha még az FE oldalon úgy szerkesztjük C' -t, hogy álljon $FC' : FE = AD : AB = 1/2$, akkor hasonlóan $A'C' \parallel AC$ és $B'C' \parallel BC$, tehát az ABC háromszög oldalegyeneseit úgy kapjuk, hogy vesszük D -n, E -n, F -en át rendre az $A'B'$ -vel, ill. $B'C'$ -vel, ill. $C'A'$ -vel párhuzamos egyenest.

Pelikán József (Budapest, Fazekas M. gyak. g. I. o. t.)