

I. megoldás. A gyökjel alatti kifejezés x megadott kifejezésének behelyettesítésével így alakul:

$$\begin{aligned}\frac{a^2}{x^2} + 1 &= \frac{4a^2b^2}{(a^2 - b^2)^2} + 1 = \frac{4a^2b^2 + a^4 - 2a^2b^2 + b^4}{(a^2 - b^2)^2} = \\ &= \frac{(a^2 + b^2)^2}{(a^2 - b^2)^2} = \left(\frac{(a^2 + b^2)^2}{(a^2 - b^2)^2} \right)^2.\end{aligned}$$

Így a K -ban felhasználandó pozitív négyzetgyökök

$$\frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}, \quad \text{ill.} \quad -\frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}$$

aszerint, hogy $b^2 < a^2$, ill. $b^2 > a^2$ (egyenlőség esetén K -nak nincs értelme). Ezért az első esetben

$$K' = \frac{2ab}{a^2 - b^2} + \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} = \frac{(a + b)^2}{(a + b)(a - b)} = \frac{a + b}{a - b},$$

a második esetben pedig

$$K'' = \frac{2ab}{a^2 - b^2} - \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} = -\frac{(a - b)^2}{(a + b)(a - b)} = \frac{b - a}{a + b},$$

Az egyszerűsítés megengedett volt, mert ha $b^2 - a^2 \neq 0$, akkor sem $a + b$, sem $a - b$ nem 0.

Megjegyezzük még, hogy az x -szel való osztás elvégzésében $b \neq 0$ korlátozást is feltételeztük.

Tongori Éva (Székesfehérvár, Teleki B. Gimn. II. o. t.)

Megjegyzés. Többen kimondták, hogy K mindig pozitív. A megállapítás helyes, mert a négyzetgyökök pozitív, az előtte álló tag abszolút értékben kisebb, így ennek előjelétől függetlenül az összeg pozitív. A megoldók indokolása azonban a nyert végső alakot vette figyelembe és csak azt az esetet, ha a is, b is pozitív, holott betűkkel nem csak pozitív számokat jelölhetünk.

II. megoldás. Az adott kifejezés szerkezete emlékeztet a másodfokú egyenlet gyökképletének következő alakjára:

$$x^2 + px + q = 0\text{-ből} \quad x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Az az egyenlet, amelynek K az egyik gyöke (ti. a nagyobb gyök, amelyhez a diszkrimináns négyzetgyökét $+$ jellel vesszük), az ismeretlent z -vel jelölve, a következő:

$$z^2 - \frac{2a}{x}z - 1 = 0.$$

x adott kifejezését behelyettesítve, szorzással

$$(1) \quad z^2 - \frac{4ab}{a^2 - b^2}z - 1 = 0.$$

A második tag együtthatójának -1 -szerese így írható:

$$(2) \quad \frac{4ab}{a^2 - b^2} = \frac{(a + b)^2 - (b - a)^2}{a^2 - b^2} = \frac{(a + b)^2}{a^2 - b^2} + \frac{(b - a)^2}{b^2 - a^2} = \frac{a + b}{a - b} + \frac{b - a}{a + b}.$$

Az átalakítás két tagjának szorzata -1 , egyenlő az (1)-beli ismert taggal. És mivel (1)-ben z^2 együtthatója 1, ezért a gyökök és az együtthatók ismert összefüggései alapján kimondhatjuk, hogy (1) gyökei

$$\frac{a + b}{a - b} \quad \text{és} \quad \frac{b - a}{a + b}.$$

A két gyök ellentett jelű, mert szorzatuk -1 , ezért a nagyobb gyök, K keresett értéke, a pozitív gyök. Ez (2) utolsó előtti alakjára tekintettel

$$\begin{aligned}a^2 - b^2 > 0 \quad \text{esetén az első tag:} \quad z &= K' = \frac{a + b}{a - b}, \\ b^2 - a^2 > 0 \quad \text{esetén a második tag:} \quad z &= K'' = \frac{b - a}{a + b}.\end{aligned}$$

Szentai Judit (Budapest, Kanizsay D. lg. II. o. t.)