

I. megoldás. Legyen a kérdéses szám $N = \overline{abcd}$. Különválasztunk egy lehetőleg nagy, 99-cel osztható részt:

$$N = 100 \cdot \overline{ab} + \overline{cd} = 99 \cdot \overline{ab} + \overline{ab} + \overline{cd}.$$

Az utolsó két szám összege kisebb mint 200 és osztható 99-cel, tehát csak 0, 99, vagy 198 lehet; az első csak $a = b = c = d = 0$ esetén következik be, az utolsó pedig csak akkor, ha mindkét szám 99, tehát $a = b = c = d = 9$. A számjegyek összege az előbbi esetben $0 = 0 \cdot 18$, az utóbbiban $36 = 2 \cdot 18$. Minden más esetben

$$\overline{ab} + \overline{cd} = 10(a + c) + (b + d) = 99.$$

Ez csak úgy lehetséges, hogy a $b + d$ összeg egyes jegye 9. Másrészt $b + d \leq 18$, tehát $b + d = 9$, $a + c = 9$ kell, hogy legyen, s így $a + b + c + d = 18$. A feladat állítása tehát helyes.

Bornes Nándor (Budapest, I. István Gimn. I. o. t.)

II. megoldás. Egy 99-cel osztható szám osztható 9-cel is, 11-gyel is. Eszerint az előbbi jelölésekkel¹

$$(1a) \quad a + b + c + d = 9m,$$

$$(1b) \quad (d + b) - (c + a) = 11n,$$

ahol m és n egész számok. (1a) alapján elég azt megmutatnunk, hogy m páros.

Mivel $d + b$ és $c + a$ legnagyobb értéke $9 + 9 = 18$, legkisebb értéke 0, azért (1b) bal oldala nem lehet nagyobb $18 - 0 = 18$ -nál és nem lehet kisebb $0 - 18 = -18$ -nál. Így n értéke gyanánt csak -1 , 0 és $+1$ jöhet szóba. Megmutatjuk, hogy csak $n = 0$ lehetséges.

(1a) és (1b) összegét és különbségét 2-vel osztva

$$(2a) \quad d + b = \frac{9m + 11n}{2},$$

$$(2b) \quad c + a = \frac{9m - 11n}{2}.$$

$n = 1$ esetén innen csak páratlan m -mel kapunk egész számot. Nem lehet azonban $m = 1$, mert úgy (1a)-ból $d + b \leq 9$, (1b)-ből viszont $d + b \geq 11$, ellentmondás. m helyén nagyobb páratlan számmal pedig $d + b$ -re (2a)-ból legalább 19-et kapunk, ez szintén lehetetlen.

$n = -1$ esetén (2b)-ből kiindulva ugyanezeket kapjuk $c + a$ -ra.

Ha már most $n = 0$, akkor (1b)-ből $d + b = a + c$, így (1a) bal oldala $2(a + c)$ alakban írható, tehát páros. Ezt akartuk bizonyítani.

Magyar Ferenc (Tatabánya, Árpád Gimn. II. o. t.)

III. megoldás. A 0 és 9999 számokra érvényes a feladat állítása. A többi szóba jövő szám $N = 99k$ alakú, ahol k egész és $1 \leq k \leq 100$. Ez így is írható:

$$N = (100 - 1)k = 100k - k = 100(k - 1) + (100 - k).$$

Itt az első tag 100-nak nem negatív egész többszöröse, a második tagra pedig $0 \leq 100 - k \leq 99$. Így 100-k az N utolsó két jegyéből álló szám, $k - 1$ pedig az ezek elhagyásával visszamaradó szám (0, ha $N = 99$). E két szám összege

$$(k - 1) + (100 - k) = 99.$$

A két számot összeadva az 1-es jegyek összegéből nem adódhat átvinni való 10-es, mert a jegyek összege legfeljebb 18; ezért az 1-es helyen levő jegyek összege is, a 10-es helyen levőké is 9, együtt 18, a bizonyítandó állításnak megfelelően.

Szabó Zoltán (Győr, Czuczor G. Gimn. I. o. t.)

Megjegyzés. E megoldás záró lépése azonos az I. megoldásával, de más úton jutottunk hozzá.

¹ A 11-gyel való oszthatóság itt felhasznált ismertető jelét röviden lásd pl. *Radványi László: Az oszthatóság egy általános ismertető jeléről*, K. M. L. 24 (1962/1) 12. o.; bővebben: 609. gyak. K. M. L. 21 (1960/11) 145. o.