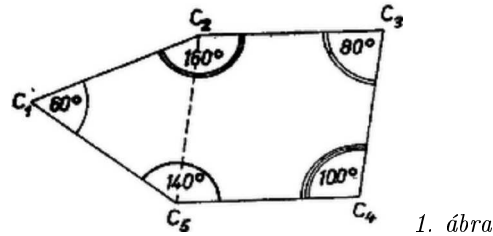


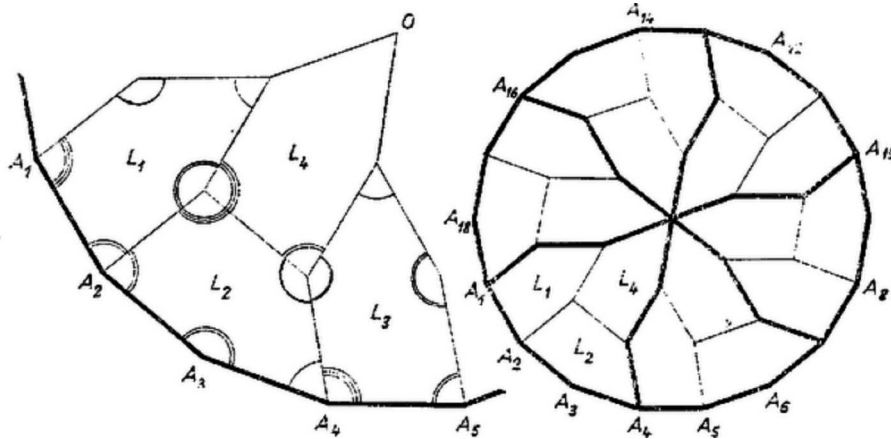
Az ötszöget pl. úgy rajzolhatjuk meg, hogy egy  $c$  oldalú szabályos háromszög egyik oldalára olyan rombuszt rajzolunk, melynek szögei 80 és 100 fokosak (1. ábra). A keletkező  $C_1C_2C_3C_4C_5$  ötszöglemez ötödik szöge  $140^\circ$ . Másrészt az  $A_1A_2A_3 \dots A_{17}A_{18} = S$  szabályos 18-szög szögei  $160^\circ$ -osak. Ezeket lemezeink szögeivel háromféleképpen fedhetjük le: egyetlen lemez  $160^\circ$ -os szögével, vagy két lemez  $60^\circ$ -os és  $100^\circ$ -os szögeinek összeillesztésével, végül két lemez  $80^\circ$ -os szögeinek összeillesztésével. Három lemez nem vehet részt  $S$  egy szögének lefedésében, mert legkisebb szögeik összege is  $180^\circ$  lenne.



1. ábra

Ez azt is jelenti, hogy ha a lefedésben egy lemez egy csúcsa egybeesik  $S$  egy csúcsával, akkor az onnan kiinduló oldalai közül legalább az egyik egybeesik  $S$  egy oldalával.

Egyébként  $S$  és a lemezek összes oldalainak egyenlősége alapján elég lesz mindig csak a szögeket tekintenünk; ha két lemez – vagy  $S$  és egy lemez – egy-egy csúcsa és egy-egy innen kiinduló oldaluk egyenese egybeesik, akkor szomszédos csúcsaik is egybeesnek.



2. ábra

és

3. ábra

Látjuk másrészt, hogy a lemez  $140^\circ$ -os szöge nem vehet részt  $S$  szögeinek lefedésében, így a lemeznek legfeljebb háromféle oldala illeszkedhet  $S$  oldalához. Kell is, hogy mindhárom féle oldala illeszkedjék, mert nem illeszkedhet minden lemezből a  $C_3C_4$  oldal a  $100^\circ$ -os szög miatt, a  $C_2C_1$  és  $C_2C_3$  oldalak viszont a  $160^\circ$ -os szög miatt már egyetlen lemezpéldányon egyidejűen illeszkednek.

Fedjük le először pl. egy  $L_1$  lemez azon oldalával, amelyik mellett  $100^\circ$ -os és  $80^\circ$ -os szög van,  $S$ -nek az  $A_1A_2$  oldalát (a  $80^\circ$ -os szög essék  $A_2$ -be, 2. ábra). Ekkor egy  $L_2$  lemeznek ugyancsak a  $80^\circ$ -os szöge kerül  $A_2$ -be, mégpedig úgy, hogy  $160^\circ$ -os szöge  $A_3$ -ba kerüljön, mert különben  $L_1$  és  $L_2$   $160^\circ$ -os szögei egymás mellé kerülnének és a lefedetlen  $40^\circ$ -os szögtartományba már nem tudnánk lemezt illeszteni.  $A_4$ -hez ekkor úgy kell egy  $L_3$  lemez  $100^\circ$ -os szögét illesztenünk, hogy  $A_5$ -be  $80^\circ$ -os szöge kerüljön, mert a  $140^\circ$ -os szög nem kerülhet  $S$  csúcsába.

A három lemez közt a sokszög belsejében lefedetlenül maradt tartományba éppen beilleszthető egy  $L_4$  lemez, mert  $L_1$  és  $L_2$  közös csúcsánál  $100^\circ + 160^\circ = 260^\circ$ -os szögtartomány van lefedve,  $L_2$  és  $L_3$  közös csúcsánál  $140^\circ + 140^\circ = 280^\circ$ , s így a fedetlenül maradt szögtartomány  $100^\circ$ -os, ill.  $80^\circ$ -os.

Az  $L_1, L_2, L_4$  lemezekkel lefedett egyenlő oldalú 9-szög 3 oldala az  $A_1A_2A_3A_4$  kerületszakasz – ami  $S$  kerületének  $1/6$  része –, másik 3–3 oldala pedig  $L_4$   $60^\circ$ -os szögének  $O$  csúcsa körüli  $60^\circ$ -os forgással egymásba megy át, ugyanis a  $3c$  hosszúságú  $OA_1$ , ill.  $OA_4$  tört vonalak mentén egymás után található  $200^\circ$ ,  $140^\circ$ , ill.  $160^\circ$ ,  $220^\circ$  nagyságú belső szögek egymást páronként  $360^\circ$ -ra egészítik ki, az  $A_1$  és  $A_4$  csúcsnál levő szögek összege pedig  $160^\circ$ ,  $S$  egy szöge. Ezek szerint az  $L_1, L_2, L_4$  lemezhármasból öt egymás utáni,  $O$  körüli  $60^\circ$ -os forgatással, 18 lemezzel egy  $c$  oldalú szabályos 18-szöget kapunk. Ezzel a lefedés lehetőségét bebizonyítottuk.

Meggondolásainkból az is következik, hogy a talált lefedésből minden lefedés megkapható elforgatással és tükrözéssel. Másképpen fogalmazva,  $L_1$  elhelyezése után a további lemezeket már csak egyféleképpen helyezhetjük el. Valóban, annyit beláttunk, hogy  $L_2, L_3, L_4$  elhelyezését  $L_1$  már meghatározza. Viszont egy  $O$  körüli  $60^\circ$ -os elforgatás  $L_1$ -et  $L_3$ -ba viszi át, így ez ismét meghatározza egy további lemez elhelyezését: ezek úgy helyezkednek el, mintha  $L_2, L_3$ ,

$L_4$ -et forgattuk volna el  $O$  körül  $60^\circ$ -kal. Így haladva tovább éppen az előzőkben leírt lefedéshez jutunk, mint  $L_1$  elhelyezése után egyedül lehetséges lefedéshez. Ezt akartuk belátni.

*Mezei Zsuzsa* (Szentendre, Móricz Zs. g. II. o. t.)

*Megjegyzés.* Többen megjegyezték, hogy az adott lemezzel a sík is hézagtalanul és egyrétűen lefedhető, *Bollobás Bélának* „A sík lefedése egybevágó konvex sokszögekkel” c. cikkében látható 17. és 20. ábrák szerint.<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup>K. M. L. 22. (1961/5) 198. o.