Legyenek a keresett H háromszög szögei α, β, γ, legyen $\alpha < \beta < \gamma < 90^\circ$, és írjuk ezeket az $\alpha = 60^\circ + \delta$, $\beta = 60^\circ + \varepsilon$, $\gamma = 60^\circ + \zeta$ alakban. Így

$$\delta + \varepsilon + \zeta = 0^\circ, \tag{1}$$

és nyilván $\delta < 0^\circ$, $\zeta > 0^\circ$. Az első talpponti háromszögnek, T_1-nek szögei a 709. gyakorlat (1) képletei szerint

$$\alpha_1 = 180^\circ - 2\alpha = 60^\circ - 2\delta, \quad \beta_1 = 180^\circ - 2\beta = 60^\circ - 2\varepsilon,$$
$$\gamma_1 = 180^\circ - 2\gamma = 60^\circ - 2\zeta$$

(csúcsuk rendre az α-val, β-val, ill. γ-val szemben levő oldalon van). T_1 hegyesszögű, ezért talpponti háromszögének, T_2-nek az a szöge, melynek csúcsa T_1-nek az α_1-gyel szemben fekvő oldalán van:

$$\alpha_2 = 180^\circ - 2\alpha_1 = 60^\circ + 4\delta.$$

A másik két szög kifejezésének felírását mellőzhetjük, mert nyilvánvalóan ebből úgy kaphatjuk, hogy δ helyére ε-t, ill. ζ-t írunk. Hasonlóan H-nak 3., 4., …, 15. talpponti háromszögében az α_2 -ből számítható α_3-ra, az ebből számítható α_4-re, …, α_{15}-re rendre fennáll

$$\alpha_3 = 180^\circ - 2\alpha_2 = 60^\circ - 8\delta = 60^\circ + (-2)^3\delta, \quad \alpha_4 = 180^\circ - 2\alpha_3 = 60^\circ + (-2)^4\delta, \ldots,$$
$$\alpha_{15} = 60^\circ + (-2)^{15}\delta = 60^\circ - 2^{15}\delta, \tag{2}$$

mert a feltétel szerint a $T_2,\ T_3,\ \ldots,\ T_{14}$, talpponti háromszögek mindegyike hegyesszögű. Hasonlóan

$$\beta_{15} = 60^\circ - 2^{15}\varepsilon \quad \text{és} \quad \gamma_{15} = 60^\circ - 2^{15}\zeta. \tag{3}$$

T_{15} akkor hegyesszögű, ha legnagyobb szöge hegyesszög. Ez a szög α_{15}, mert az $\alpha < \beta < \gamma$-ból adódó $\delta < \varepsilon < \zeta$-t -2^{15}-nel szorozva, ami által a nagyságviszonyok ellentétesre fordulnak:

$$-2^{15}\delta > -2^{15}\varepsilon > -2^{15}\zeta,$$

itt pedig mindhárom kifejezéshez 60°-ot adva (2)-t és (3)-at kapjuk – ez viszont az egyenlőtlenségek irányát nem változtatja –, tehát

$$\alpha_{15} > \beta_{15} > \gamma_{15}.$$

Így δ-ra a következő korlátozást kapjuk:

$$\alpha_{15} < 90^\circ, \quad 2^{15}\delta > 60^\circ - 90^\circ = -30^\circ = -108\ 000'',$$

amiből osztással

$$\delta > -\frac{108\ 000''}{2^{15}} = -\frac{3375''}{2^{10}} = -\frac{3375''}{1024} > -4'',$$

tehát δ lehetséges értékei $-1''$, $-2''$, $-3''$.

Másrészt ζ csak olyan szög lehet, hogy $\gamma_{15} > 0^\circ$ legyen. Ebből az előbbihez hasonlóan

$$\zeta < \frac{60^\circ}{2^{15}} = \frac{216\ 000''}{2^{15}} = \frac{3375''}{512} < 7'', \tag{4}$$

tehát ζ lehetséges értékei: $1''$, $2''$, $3''$, $4''$, $5''$, $6''$.

Ezek szerint egy megfelelő H-alakot ad pl. a $\delta = -3''$, $\zeta = 5''$ és az ezekhez (1)-ből adódó $\varepsilon = -2''$ értékrendszer, vagyis

$$\alpha = 59^\circ 59' 57'', \quad \beta = 59^\circ 59' 58'', \quad \gamma = 60^\circ 0' 5''.$$

Az ebből képezett T_i háromszög $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ 14$ esetén ugyancsak hegyesszögű, mert szögeinek 60°-tól való eltérése a fentiek szerint rendre $2^i \cdot 3''$, ill. $2^i \cdot 2''$, ill. $2^i \cdot 5''$, a lehetséges legnagyobb eltérés $i = 14$-gyel és (4) felhasználásával

$$2^{14} \cdot 5'' < 2^{14}\frac{60^\circ}{2^{15}} = 30^\circ,$$

tehát T_{14} szögei 30° és 90° közötti szögek.

A $\zeta = 6''$ értéket nem használhatjuk, mert ez csak $\delta = \varepsilon = -3''$-cel teljesülhet, egyenlő szárú háromszöget viszont nem fogadhatunk el.

Könnyű áttekinteni az összes megoldásokat is. A fentin kívül csak a következő értékrendszerek megfelelők:

$$\delta, \varepsilon, \zeta = -3'',\ -1'',\ 4'';\quad -3'',\ 0'',\ 3'';\quad -3'',\ 1'',\ 2'';$$
$$-2'',\ -1'',\ 3'';\quad -2'',\ 0'',\ 2'';\quad -1'',\ 0'',\ 1''.$$

(Az előbbi példa mintájára beláthatjuk, hogy $T_1,\ T_2,\ \ldots,\ T_{14}$ is hegyesszögűek.)

Huhn András (Szeged, Ságvári E. gyak. g. I. o. t.)

Megjegyzés. α_{15}-öt az alábbiak szerint segédszögek nélkül is számíthatjuk:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= 180^\circ - 2\alpha, \quad \alpha_2 = 180^\circ - 2\alpha_1 = 180^\circ - 2\cdot 180^\circ + 4\alpha,\\
\alpha_3 &= 180^\circ - 2\alpha_2 = 180^\circ - 2\cdot 180^\circ + (-2)^2\cdot 180^\circ + (-2)^3\ \alpha, \ldots,\\
\alpha_{15} &= 180^\circ - 2\cdot 180^\circ + (-2)^2\cdot 180^\circ + (-2)^3\cdot 180^\circ + \ldots + (-2)^{14}\cdot 180^\circ +\\
&\quad + (-2)^{15}\ \alpha = 180^\circ\left[1 + (-2) + (-2)^2 + (-2)^3 + \ldots + (-2)^{14}\right] + (-2)^{15}\ \alpha =\\
&\quad = 180^\circ\frac{1-(-2)^{15}}{1-(-2)} - 2^{15}\ \alpha = (2^{15}+1)60^\circ - 2^{15}\ \alpha = 60^\circ + 2^{15}(60^\circ - \alpha).
\end{aligned}$$

Ezzel lényegében ismét (2)-re jutottunk.

Major Pál (Budapest, Kossuth L. gépip. t. I. o. t.)