

Legyen

$$\sqrt[n]{x+1} = u, \quad \sqrt[n]{x-1} = v; \quad \text{ekkor} \quad \sqrt[n]{x^2-1} = uv,$$

és osszuk az így átalakított egyenletet v^2 -nel ($v = 0$ csak $x = 1$ mellett volna lehetséges, ez azonban nem gyöke az egyenletnek):

$$u^2 + v^2 = 4uv; \quad \left(\frac{u}{v}\right)^2 - 4\frac{u}{v} + 1 = 0.$$

Innen, mindjárt visszahozva x kifejezéseit

$$\frac{u}{v} = \sqrt[n]{\frac{x+1}{x-1}} = 2 \pm \sqrt{3}, \quad \text{végül}^1 \quad x_{1,2}^{(n)} = \frac{(2 \pm \sqrt{3})^n + 1}{(2 \pm \sqrt{3})^n - 1}.$$

Képletünk $n = 2, 3$ és 4 -re a következőket adja:

$$\begin{aligned} x^{(2)} &= \frac{(2 \pm \sqrt{3})^2 + 1}{(2 \pm \sqrt{3})^2 - 1} = \frac{8 \pm 4\sqrt{3}}{6 \pm 4\sqrt{3}} = \frac{(4 \pm 2\sqrt{3})(3 \mp 2\sqrt{3})}{(3 \pm 2\sqrt{3})(3 \mp 2\sqrt{3})} = \frac{\mp 2\sqrt{3}}{9 - 12} = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}, \\ x^{(3)} &= \frac{(2 \pm \sqrt{3})^3 + 1}{(2 \pm \sqrt{3})^3 - 1} = \frac{27 \pm 15\sqrt{3}}{25 \pm 15\sqrt{3}} \cdot \frac{5 \mp 3\sqrt{3}}{5 \mp 3\sqrt{3}} = \frac{\mp 6\sqrt{3}}{-10} = \pm \frac{3\sqrt{3}}{5}, \\ x^{(4)} &= \frac{(7 \pm 4\sqrt{3})^2 + 1}{(7 \pm 4\sqrt{3})^2 - 1} = \frac{98 \pm 56\sqrt{3}}{96 \pm 56\sqrt{3}} \cdot \frac{12 \mp 7\sqrt{3}}{12 \mp 7\sqrt{3}} = \pm \frac{7}{4\sqrt{3}}, \end{aligned}$$

ill. tizedes alakú közelítő törtekkel:

$$x^{(2)} \approx \pm 1,155, \quad x^{(3)} \approx \pm 1,039, \quad x^{(4)} \approx \pm 1,010.$$

Leporisz Gyögy (Budapest, Piarista g. II. o. t.)

Megjegyzések. 1. A két gyök mindig egymás negatívja, ugyanis

$$\begin{aligned} x_1^{(n)} &= \frac{(2 + \sqrt{3})^n + 1}{(2 + \sqrt{3})^n - 1} = \frac{[(2 + \sqrt{3})^n + 1][(2 - \sqrt{3})^n - 1]}{[(2 + \sqrt{3})^n - 1][(2 - \sqrt{3})^n - 1]} = \\ &= \frac{(2 - \sqrt{3})^n - (2 + \sqrt{3})^n}{2 - [(2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n]} = \frac{(2 + \sqrt{3})^n - (2 - \sqrt{3})^n}{[(2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n] - 2}, \\ x_2^{(n)} &= \frac{[(2 - \sqrt{3})^n + 1][(2 + \sqrt{3})^n - 1]}{[(2 - \sqrt{3})^n - 1][(2 + \sqrt{3})^n - 1]} = \frac{(2 + \sqrt{3})^n - (2 - \sqrt{3})^n}{2 - [(2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n]} = -x_1^{(n)}. \end{aligned}$$

Ez abból is látható, hogy az u/v -re kapott egyenlet két gyöke egymás reciproka, és u/v -ben x helyett $-x$ -et írva az a reciprokába megy át. ($x_1^{(n)}$ számlálója és nevezője pozitív.) Az is könnyen látható, hogy a hatványok kifejtésével a nevezőben csak egész tagok maradnak meg, a számlálóban megmaradó tagok pedig $\sqrt{3}$ egész többszörösei.

2. Az n -edik gyökök mindig valósak. Ugyanis a gyökjelek alatt (1) bal oldalán minden (valós) x mellett nem negatív szám áll, másrészt a talált gyökökkel mindig $|x_{1,2}| > 1$, tehát a jobb oldali gyökjel alatti szám pozitív. Valóban

$$x_1^{(n)} = \frac{(2 + \sqrt{3})^n + 1}{(2 + \sqrt{3})^n - 1} = 1 + \frac{2}{(2 + \sqrt{3})^n - 1} > 1,$$

és így $x_2^{(n)} = -x_1^{(n)} < -1$.

¹ A felső indexszel arra utalunk, hogy az n gyökkitevőtől függően különböző egyenletek gyökeiről van szó.