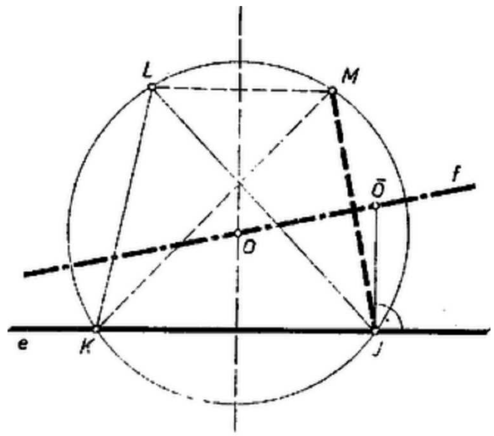
I. megoldás. Tükrözzük a JKL háromszöget a JK oldal felező merőlegesére, legyen L tükörképe M (1. ábra). A JM szakasz húrja a JKL háromszög k körülírt körének, mert a tükrözés tengelye ennek a körnek szimmetriatengelye. Másrészt a JM szakasz ugyanaz a szakasz a K pont minden helyzeténél, mert J kezdőpontja és $JM=KL$ hossza állandó, továbbá, ha az e egyenesnek irányítást adunk, nem változik a KL szakasznak ezzel az irányítással bezárt szöge, így a JM szakasznak ezzel az iránnyal bezárt szöge, ami az előbbi szög kiegészítő szöge, szintén nem változik. Így JM közös húrja az összes szóba jövő köröknek, tehát f felező merőlegese átmegy a körök középpontjain.



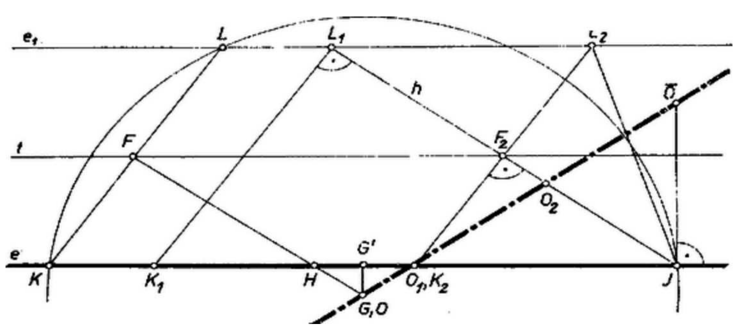
1. ábra

Legyen mármost f-nek egy tetszés szerinti pontja O^* és az O^* körül O^*J sugárral írt k^* kör második metszéspontja e-vel K^*, feltéve, hogy k^* nem érinti e-t. Legyen a K^*JM háromszög tükörképe K^*J felező merőlegesére JK^*L^*, akkor az előző meggondolás megfordításával adódik, hogy K^*L^* hossza és iránya a KL számára megadott távolság és irány, és a háromszög körülírt köre k. Így O^* pontja a mértani helynek.

Akkor kapunk e-t érintő kört, ha középpontnak az e-re J-ben állított merőlegesnek f-fel való O metszéspontját választjuk. Ekkor a K^*MJ háromszög elfajul a JM egyenesszakasszá, s így JK^*L^* is egyenesszakasszá fajul. Tehát a mértani hely az f egyenes, az O pont kivételével.

Hirka András (Pannonhalma, Benedekrendi gimn. II. o. t.)

II. megoldás. Ha KL nem merőleges e-re, akkor válasszuk ki a szakasz két különleges helyzetét: 1. amikor a JKL háromszög L-nél derékszögű, ill. 2. amikor a háromszög egyenlő szárú: $JL=JK$ (2. ábra). Csak egy-egy ilyen helyzet van, mindkettőt kitűzhetjük a J-ből KL irányára állított h merőlegessel. Arra az L_1 pontra, amelyben L-nek e_1 pályáját metszi h, $L_1K_1\perp JL_1$; ahol pedig a KL szakasz F felezőpontjának pályáját metszi, vagyis az e, e_1 síksáv t szimmetriatengelyét, ott van a második helyzethez tartozó F_2, erre $F_2K_2\perp JF_2$. Legyenek a megfelelő körközéppontok O_1 és O_2. O_1 azonos K_2-vel, mert F_2K_2 merőlegesen felezi a JL_1 befogót, így felezi a JK_1 átfogót is, és ez a felezőpont egyben a derékszögű háromszög köré írt kör középpontja. Másrészt O_2 a h-n van. Megmutatjuk, hogy a mozgó szakasz tetszés szerinti KL helyzetéhez tartozó O középpont rajta van az O_1O_2 egyenesen.



2. ábra

Messe a KL-re, ennek F felezőpontjában állított merőleges O_1O_2-t G-ben, e-t H-ban. Elegendő azt belátni, hogy G rajta van JK felező merőlegesén is. A GHO_1 szög vagy azonos az FHK szöggel, vagy annak csúcsszöge, ezért egyenlő az utóbbival egyállású F_2JK_2 szöggel. Viszont az O_2JK_2 háromszög egyenlő szárú, így $F_2JK_2\sphericalangle=O_2JK_2\sphericalangle=O_2K_2J\sphericalangle=O_2O_1J\sphericalangle$.Végül az O_2O_1J szög azonos a GO_1H szöggel, vagy annak csúcsszöge, így $GHO_1\sphericalangle=GO_1J\sphericalangle=GO_1H\sphericalangle$, és a GHO_1 háromszög egyenlő szárú. Ezért, G-nek e-n levő vetületét G'-vel jelölve HG' és O_1G' egyenlő és ellentétes irányú szakaszok. – Másrészt a KFH háromszög eltolással áll elő K_2F_2J-ből, ezért HK és $K_2J=O_1J$ is egyenlő és ellentétes irányú szakaszok, ennélfogva ugyanez áll a KG' és JG' szakaszpárra. Ez pedig azt jelenti, hogy G rajta van KJ felező merőlegesén is, KL-én is, vagyis G azonos a JKL háromszög köré írt kör O középpontjával. Ezt akartuk bizonyítani.

Azt, hogy az O_1O_2 egyenes mely pontjai alkotják a mértani helyet, az I. megoldásban láttuk.

Ha KL merőleges e-re, akkor a JKL háromszög K-nál derékszögű, és O a JL átfogó felezőpontjában van. Másrészt L egy az e-vel párhuzamos e_1 egyenest ír le, tehát a mértani hely az e, e_1 egyenespárral határolt síksáv t szimmetriatengelye, kivéve J-nek t-re vett $\overline{O}$ vetületét. Ebben az esetben $\overline{O}$ is elfogadható, ha a JL szakasszá elfajult JKL háromszög körülírt körének azt a legkisebb sugarú kört tekintjük, amely átmegy J-n és L-en.

Radó Iván (Budapest, I. István g. I. o. t.)