

I. megoldás. Minden tényező két négyzet különbsége, és így két további tényező szorzatára bontható. Vegyük ki minden tényezőtől az alapok különbségét és tekintsük ezek szorzatát:

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{4}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \dots \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n}.$$

Hasonlóan az alapok összegeinek szorzatára

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{3}\right) \left(1 + \frac{1}{4}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} \dots \frac{n+1}{n} = \frac{n+1}{2}.$$

Ennélfogva

$$K = \frac{1}{2} \cdot \frac{n+1}{2} = \frac{n+1}{2n}.$$

Páratlan n esetén ez még 2-vel egyszerűsíthető, páros n -re viszont már nem egyszerűsíthető, mert n és $n-1$ szomszédos természetes számok és így relatív prímek.

Hoffer Anna (Budapest, Hámán K. lg. I. o. t.)

II. megoldás. Kipróbálva n első néhány értékét, könnyen észrevehetjük, hogy ezekre a következő összefüggés érvényes:

$$K = K_n = \frac{n+1}{2n}.$$

A teljes indukció módszerével bebizonyítjuk, hogy ez minden további n -re is érvényes. Valóban, ha n -re helyes az összefüggés, akkor

$$\begin{aligned} K_{n+1} &= K_n \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) = \frac{n+1}{2n} \cdot \frac{(n+1)^2 - 1^2}{(n+1)^2} = \\ &= \frac{(n+1)n(n+2)}{2n(n+1)^2} = \frac{n+2}{2(n+1)}, \end{aligned}$$

vagyis a sejtett szabályszerűség n -ről átöröklődik a következő természetes számra. Így, mivel a szabályszerűség $n = 2$ esetében érvényes, minden a 2-nél nagyobb természetes számra is érvényes.

Szidarovszky Klára (Budapest, Ságvári E. lg. I. o. t.)

Megjegyzés. Tulajdonképpen az I. megoldásban is teljes indukciót alkalmaztunk, de a bizonyítást mellőzhettük, a két rész-sorozatban annyira nyilvánvaló volt az egyszerűsítés lehetősége és eredménye.