

A $c = -d = e = f = 1$ esetben képletünk így alakul:

$$(1a) \quad a_{k+1} = \frac{a_k - 1}{a_k + 1}.$$

$k = 1, 2, 3$ és 4-re

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{a_1 - 1}{a_1 + 1}, \quad a_3 = \frac{a_2 - 1}{a_2 + 1} = \frac{\frac{a_1 - 1}{a_1 + 1} - 1}{\frac{a_1 - 1}{a_1 + 1} + 1} = -\frac{1}{a_1}, \\ a_4 &= \frac{a_3 - 1}{a_3 + 1} = \frac{-\frac{1}{a_1} - 1}{-\frac{1}{a_1} + 1} = -\frac{a_1 + 1}{a_1 - 1} \quad \text{és} \\ a_5 &= \frac{a_4 - 1}{a_4 + 1} = \frac{-\frac{a_1 + 1}{a_1 - 1} - 1}{-\frac{a_1 + 1}{a_1 - 1} + 1} = a_1. \end{aligned}$$

Eszerint az 5. tag egyenlő az elsővel. És mivel képletünk szerint minden tag csak a megelőzőtől függ, azért $a_6 = a_2$, $a_7 = a_3$, $a_8 = a_4$, $a_9 = a_5 = a_1$ és így tovább, tehát a sorozat tagjai négyesével periodikusan ismétlődnek.

Nem választhatjuk a_1 -et úgy, hogy a_2 , a_3 , vagy a_4 nevezője 0 legyen, tehát $a \neq -1, 0, +1$; minden más értékkel számsorozatunknak akárhány tagja képezhető.

A továbbiakban olyan c, d, e, f értékrendszert keresünk, amellyel a sorozatnak csak 3 különböző tagja van. Ezek csak a_1, a_2, a_3 lehetnek, azt kell elérnünk, hogy $a_4 = a_1$ legyen, mert így a fentiek szerint az $a_5 = a_2$, $a_6 = a_3$, $a_7 = a_4 = a_1, \dots$ egyenlőségek is biztosítva vannak. Az (1) képlettel

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{ca_1 + d}{ea_1 + f}, \\ a_3 &= \frac{c \frac{ca_1 + d}{ea_1 + f} + d}{e \frac{ca_1 + d}{ea_1 + f} + f} = \frac{(c^2 + de)a_1 + d(c + f)}{e(c + f)a_1 + (de + f^2)}. \end{aligned}$$

Vezessük be átmenetileg a következő jelöléseket:

$$c^2 + de = C, \quad d(c + f) = D, \quad e(c + f) = E, \quad de + f^2 = F.$$

Így számításainkat egyszerűbben folytathatjuk:

$$\begin{aligned} a_3 &= \frac{Ca_1 + D}{Ea_1 + F} \quad \text{és} \\ a_4 &= \frac{c \frac{Ca_1 + D}{Ea_1 + F} + d}{e \frac{Ca_1 + D}{Ea_1 + F} + f} = \frac{(cC + dE)a_1 + (cD + dF)}{(eC + fE)a_1 + (eD + fF)}. \end{aligned}$$

Tetszés szerint választott a_1 mellett $a_4 = a_1$ biztosan fennáll, ha az utolsó alak nevezőjében nem lép fel a_1 , a számlálóban nem lép fel a_1 -től mentes tag, végül a_1 -nek a számlálóbeli együtthatója egyenlő a nevezőbeli második taggal, azaz ha

$$(2) \quad eC + fE = 0, \quad cD + dF = 0, \quad cC + dE = eD + fF.$$

Itt mindent az eredeti együtthatókkal kifejezve, 0-ra redukálva és észrevéve, hogy $dE = eD$:

$$(3) \quad e(c^2 + de) + ef(c + f) = e(c^2 + cf + de + f^2) = 0,$$

$$(4) \quad cd(c + f) + d(de + f^2) = d(c^2 + cf + de + f^2) = 0,$$

$$cC - fF = 0, \quad \text{azaz} \quad c^3 + cde - def - f^3 = 0,$$

illetőleg kiemeléssel

$$(5) \quad (c - f)(c^2 + cf + f^2 + de) = 0.$$

A (3)–(5) követelmények nyilvánvalóan teljesülnek, ha egyidejűleg $d = 0$, $e = 0$ és $c - f = 0$, azaz $c = f$. Ekkor azonban, ha még $c \neq 0$ is áll, (1) szerint $a_{k+1} = a_k$, a sorozat minden tagja egyenlő. Ezt az érdektelen esetet mellőzhetjük. Ha a d , e , $c - f$ tényezők közt van 0-tól különböző, akkor (3), (4), (5) mindegyike csak úgy állhat fenn, ha

$$(6) \quad c^2 + cf + f^2 + de = 0,$$

és ekkor valóban mindegyik teljesül. Itt c , d , e , f közül bármelyik hármat tetszés szerint megválasztva a negyediket kiszámíthatjuk.

- Pl. I. $c = d = f = 1$ -gyel $e = -3$;
 II. $c = e = f = 1$ -gyel $d = -3$;
 III. IV. $d = -1$, $e = 4$, $f = 2$ -vel $c_1 = 0$ $c_2 = -2$.

Az I – III. példákban a sorozat első három tagja

$$\begin{aligned} a_1, & \quad \frac{a_1 + 1}{1 - 3a_1}, \quad \frac{a_1 - 1}{3a_1 + 1}, \quad (\text{és } a_4 = a_1); \\ b_1, & \quad \frac{b_1 - 3}{b_1 + 1}, \quad \frac{b_1 + 3}{1 - b_1}, \quad (\text{és } b_4 = b_1); \\ g_1, & \quad \frac{-1}{4g_1 + 2}, \quad -\frac{2g_1 + 1}{4g_1}, \quad (\text{és } g_4 = g_1), \end{aligned}$$

általában különböző, a IV-ben azonban

$$a_{k+1} = \frac{-2a_k - 1}{4a_k + 2} = -\frac{1}{2}$$

-re jutunk, vagyis a sorozat tagjainak értéke a_2 -től kezdve állandó, függetlenül a_1 -től.

Lőrincz Csaba (Orosháza, Tánicsics M. g. II. o. t.)

Megjegyzések. 1. Egyszerű feltételt kapunk az együtthatók között azt keresve, mikor áll be a IV. példában látott eset, mikor válik állandóvá a sorozat. Alakítsuk (1)-et így:

$$a_{k+1} = \frac{ca_k + d}{ea_k + f} = \frac{\frac{c}{e}(ea_k + f) - \frac{cf}{e} + d}{ea_k + f} = \frac{c}{e} + \frac{de - cf}{e(ea_k + f)},$$

tehát a sorozat az első tagtól függetlenül c/e -vel egyenlő a második tagtól kezdve, ha $de - cf = 0$. A IV. példában ilyen értékrendszert találtunk.

2. Az (1a) felhasználásával általában

$$a_{k+2} = \frac{a_{k+1} - 1}{a_{k+1} + 1} = -\frac{1}{a_k}, \quad \text{és így } a_{k+4} = -\frac{1}{a_{k+2}} = a_k.$$