

I. megoldás. Tegyük fel, hogy egyik nevező sem 0 és jelöljük a négy hányados közös értékét k -val. Ekkor

$$\frac{a+b}{3a-b} = k \text{-ből} \quad b = a \frac{3k-1}{k+1} = aj, \quad \text{ahol} \quad j = \frac{3k-1}{k+1}.$$

Ugyanígy a további hányadosokból külön-külön $c = bj$, $d = cj$, $a = dj$. Ezekből kiküszöböléssel $a = dj = cj^2 = bj^3 = aj^4$, tehát $a(j^4 - 1) = 0$. Itt nem lehet $a = 0$, mert abból $b = c = d = 0$ adódnék, és egyik hányadosnak sem volna értelme. Ezért $j^4 - 1 = 0$, amiből, csak valós számokra szorítkozva, $j = \pm 1$.

Mármint $j = +1$ -gyel $a = b = c = d \neq 0$, és így (2) bal és jobb oldalának értéke egyaránt $4a^2$, az egyenlőség fennáll (az (1)-beli hányadosok értéke ugyancsak 1). Ellenben $j = -1$ -gyel $b = d = -a$ és $c = a$, így (2) bal oldala ismét $4a^2 (> 0)$, jobb oldala pedig 0, tehát a kérdéses egyenlőség nem áll fenn. Ekkor az (1)-beli hányadosok értéke 0.

Eszerint az állítás az adott alakban nem helyes, de helyessé lesz pl. a következő módosított alakban: „ha

$$\frac{a+b}{3a-b} = \frac{b+c}{3b-c} = \frac{c+d}{3c-d} = \frac{d+a}{3d-a} \neq 0, \quad \text{akkor} \\ a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = ab + bc + cd + da."$$

Folly Gábor (Budapest, Piarista g. II. o. t.)

II. megoldás. A feltevés a négy változó között három összefüggést ad meg, ez módot nyújt közülük három kiküszöbölésére és a vizsgálandó két kifejezésnek csak egy-egy változóval való kifejezésére. Az $a = b = c = d = 0$ esetet kizárva az első két hányados egyenlőségéből $b^2 = ac$, az elsőből és a harmadikból $ab = cd$. Ezekhez hasonlóan még a következő egyszerű összefüggéseket kapjuk: $c^2 = bd$, $bc = ad$, $d^2 = ac$, $a^2 = bd$.

Ezeket egybevetve egyrészt $c^2 = a^2$, $d^2 = b^2$. Innen $c = \varepsilon_1 a$ és $d = \varepsilon_2 b$, ahol ε_1 és ε_2 a ± 1 értékeket veheti fel. Így azonban $ab = cd = \varepsilon_1 \varepsilon_2 ab$, azért $\varepsilon_1 \varepsilon_2 = 1$, tehát $\varepsilon_2 = \varepsilon_1$. Másrészt $b^2 = ac = \varepsilon_1 a^2$, ezért csak $\varepsilon_1 = +1$ lehet, különben nem lehetne a , b mindegyike valós.

Mostmár $c = a$, $d = b$ és $b^2 = a^2$ -ből $b = \pm a$. A $b = +a (= c = d)$ esetben (2) mindkét oldala $4a^2$; a $b = -a$ esetben viszont a jobb oldal 0, a bal pedig ismét $4a^2 (> 0)$, az egyenlőség nem áll fenn. Ezek szerint az állítás általában nem érvényes.