

The diagram illustrates a mechanism with two links, k_1 and k_2 , pivoted at points A and B respectively. A coupler link p_1 connects a point on k_1 to a point on k_2 . The instantaneous centers of rotation are O_1 and O_2 , and the angular velocities are ω . The instantaneous velocity vectors at the pivots are F_1 and F_2 .

3. ábra

Ha $P \equiv E$, akkor nyilván $M \equiv C$. – Az O_1PO_2C idom mindig paralelogramma, ezért az $O_1O_2C\Delta$ egybevágó és azonos körüljárású O_2O_1P -vel, ez pedig egybevágó és ellentétes körüljárású O_2O_1M -mel, mert M a P tükörképe O_1O_2 -re. Ezért O_1O_2C és O_2O_1M egymás tükörképei O_1O_2 felező merőlegesére, tehát O_1O_2MC egyenlő szárú (húr-) trapéz és $O_2MC\angle = O_1CM\angle$. Így az $ABMC$ négyszög A és M csúcsainál levő szögek összege:

$$\begin{aligned} BAC\angle + BMC\angle &= ABC\angle + (BMO_2\angle + O_2MC\angle) = (ABC\angle + O_2BM\angle) + \\ &+ O_1CM\angle = ABM\angle + ACM\angle, \end{aligned}$$

egyenlő a B és C csúcsoknál levő szögek összegével, tehát a négyszög húrnégyszög. Ezzel állításunkat bebizonyítottuk.

Megfordítva: az $ABC\Delta$ köré írt kör A -t nem tartalmazó BC ívén felvett tetszés szerinti M^* -hoz úgy kapjuk az öt előállító P^* pontot, mint a BM^* felező merőlegesével BC -ből kimetszett O_2^* pont körül $O_2^*B = O_2^*M^*$ sugárral írt k_2^* körnek AB -vel való második metszéspontját. Így a P^*BO_2 egyenlő szárú háromszög hasonló $ABC\Delta$ -höz, mert B -nél levő szögük közös, ezért $O_2^*P^* = \lambda \cdot P^*B$, vagyis O_2^* azonos a P^* -hoz rendelt O_2 -vel, k_2^* azonos k_2 -vel, tehát k_2 valóban átmegy M^* -on; továbbá $P^*O_2 \parallel AC$. A P^* -hoz rendelt O_1 -et AC -ből a P^* -on átmenő, BC -vel párhuzamos metszi ki, és csak azt kell belátnunk, hogy az O_1 körül O_1P sugárral írt kör átmegy M^* -on. M^* felvétele folytán $BAC\angle + BM^*C\angle = ABM^*\angle + ACM^*\angle$. Vonjuk ki ebből a feltevés és O_2 szerkesztése folytán fennálló $BAC\angle + BM^*O_2\angle = ABC\angle + O_2BM^*\angle = ABM^*\angle$ egyenlőséget, nyerjük: $O_2M^*C\angle = ACM^*\angle = O_1CM^*\angle$. Másrészt szerkesztésnél fogva $CO_1 = O_2P^* = O_2M^*$, tehát a CM^*O_1 és M^*CO_2 háromszögek egybevágók, mert a C -ben, ill. M^* -ban levő szögek és itt összefutó oldalaik egyenlők. Ezért O_1M^* egyenlő O_2C -vel, ez pedig szerkesztésnél fogva P^*O_1 -gyel, k_1 sugarával, tehát k_1 valóban átmegy M^* -on.

Eszerint M mértani helye (F' -ben) az AB szakasz $AMB\angle = ACB\angle = \omega$ nyílású látószögműködőre.

Corradi Gábor (Győr, Czuczor G. g. II.o. t.)

Megjegyzés. A fentiek alapján $CO_1 + CO_2 = CA$, állandó, és M -et így is származtathatjuk: egy ABC egyenlő szárú háromszög ($AC = BC$) AC és BC szárán legyen O_1 és O_2 úgy, hogy $O_1C + CO_2 = AC$. Ekkor M az O_1CO_2 háromszög köré írt kör második közös pontja a C -n átmenő, O_1O_2 -vel párhuzamos egyenessel. Így a feladat az 1961. évi Arany Dániel tanulóversenyek haladó fokán a II. fordulóban kitűzött 3. feladat¹ általánosítása arra az esetre, ha derékszög helyett a λ -val meghatározott ACB szögből indulunk ki. $\lambda = 1/\sqrt{2}$ esetén az ACB szög derékszög.

Corradi Gábor

¹Lásd K. M. L. 24 (1962/1) 11. o.