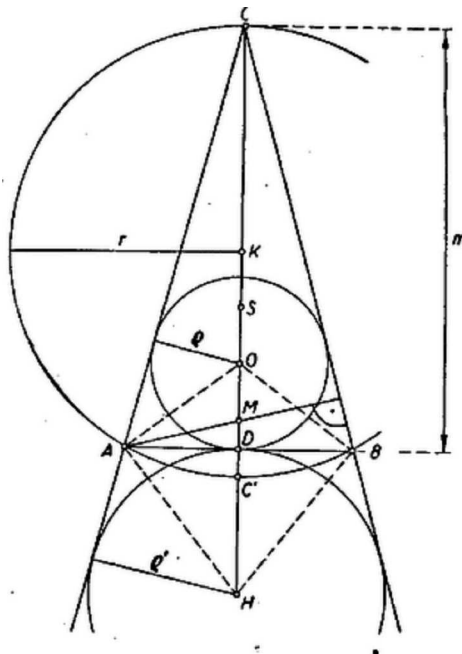


I. Mindegyik vizsgálandó nevezetes pont a háromszög tengelyén van. A köztük levő távolságok legfeljebb 0,2 mm pontossáig mérhetőek meg, ha ti. a szerkesztést jól hegyezett kemény ceruzával végeztük, amely kb. 0,1 mm vastag vonalat rajzol. (A több lépésből álló szerkesztésekben az elkerülhetetlen hibák felszaporodhatnak; ezért is célszerű a szerkesztést – ha csak mérésre szorítkozunk – legalább kétszer, egymástól függetlenül elvégezni.) A pontokat a feladat fenti sorrendjében  $S$ ,  $M$ ,  $K$ ,  $O$ ,  $H$ -val jelölve a távolságokat (mm-ben) az alábbi táblázat tünteti fel (a teljes táblázat a jobbra lejtő átlóra szimmetrikus lenne, elég a felét kiírni):

	$S$ -ig	$O$ -ig	$M$ -ig	$H$ -ig
$K$ -tól	15,5	31,0	46,5	93,0
$S$ -tól	–	15,5	31,0	77,5
$O$ -tól	–	–	15,5	62,0
$M$ -tól	–	–	–	46,5



Érdekes, hogy a 15,5 mm mérési eredmény 3-szor, a 31,0 és 46,5 mm pedig 2-szer–2-szer lép fel, továbbá, hogy a 31,0, 46,5, 62,0, 77,5, 93,0 mm-es eredmény a 15,5-nek rendre 2-szerese, ill. 3-, 4-, 5-, 6-szorosa.

*Szentai Judit* (Budapest, Kanizsai D. lg. I. o. t.)

*Treer Mária* (Budapest, Kaffka M. lg. I. o. t.) II. A távolságokat számítással pontosan megállapíthatjuk. Legyenek a háromszög csúcsai  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , ahol  $AB = 60$  mm, és az alap felezőpontja  $D$ . Ekkor az  $ACD$  derékszögű háromszögből a magasság  $m = CD = \sqrt{13 \cdot 500} = 30\sqrt{13}$  mm (tovább is a mm az egység),  $DS = CD/3 = 10\sqrt{15}$ , mert  $S$  harmadolja  $DC$ -t. Az  $AMD$  és  $CBD$  derékszögű háromszögek hasonlóak, mert  $A$  és  $C$ -nél levő (hegyes) szögek szárai páronként merőlegesek, ezért

$$DM = \frac{DA}{DC} \cdot DB = 2\sqrt{15}.$$

Legyen a körülírt kör sugara  $r$ , a  $C$ -vel átellenes pontja  $C'$ . Így a  $CC'A$  derékszögű háromszögből az ismert mértani középarányos tétel szerint

$$CA^2 = CD \cdot CC' = 2r \cdot CD, \quad r = 16\sqrt{15},$$

és így  $DK = m - r = 14\sqrt{15}$ .

$O$  és  $H$  helyzetének meghatározására kiszámítjuk  $D$ -től való távolságukat. Ezek egyenlők a beírt kör  $\varrho$ , ill. a hozzáírt kör  $\varrho'$  sugarával, mert a körök  $AB$ -t éppen  $D$ -ben érintik.  $\varrho$ -t meghatározhatjuk abból, hogy  $\varrho$  az  $ABO$ ,  $BCO$  és  $CAO$  háromszögeknek az  $AB$ ,  $BC$ ,  $CA$  alaphoz tartozó magassága, és e 3 háromszög együttes területe egyenlő az  $ABC$  háromszög  $t$  területével:

$$\frac{AB \cdot \varrho}{2} + \frac{BC \cdot \varrho}{2} + \frac{CA \cdot \varrho}{2} = \frac{\varrho}{2}(AB + BC + CA) = \frac{AB \cdot CD}{2},$$

amiből  $DO = \varrho = 6\sqrt{15}$ .  $\varrho'$ -t hasonlóan kapjuk: a  $BCH$  és  $CAH$  háromszögek területének összegéből az  $ABH$  háromszög területét kivonva ismét  $ABC$  területét kapjuk:

$$\frac{BC \cdot \varrho'}{2} + \frac{CA \cdot \varrho'}{2} - \frac{AB \cdot \varrho'}{2} = \frac{BC \cdot CD}{2},$$

$$DH = \varrho' = \frac{AB \cdot CD}{BC + CA - AB} = 10\sqrt{15}.$$

Most már a kérdéses távolságokat  $DS$ ,  $DM$ ,  $DK$ ,  $D0$ ,  $DH$ -ból kivonással és összeadással abból kapjuk, hogy mindegyik vizsgálandó pont és  $D$  is az  $ABC\Delta$  tengelyén van, és pedig  $H$  kivételével mindegyik a háromszög belsejében (ugyanis a háromszög hegyesszögű, mert alapja kisebb a száránál, ezért  $M$  és  $K$  belső pontok). Így

$$KS = SO = OM = 4\sqrt{15}, \quad KO = SM = 8\sqrt{15},$$

$$KM = MH = 12\sqrt{15}, \quad OH = 16\sqrt{15}, \quad SH = 20\sqrt{15}, \quad KH = 24\sqrt{15},$$

vagyis ebben a speciális háromszögben a  $K$ ,  $S$ ,  $O$ ,  $M$  pontok egymástól egyenlő távolságban sorakoznak a tengelyen és  $M$ -től  $C'$  is ennyire van, mert  $DC' = 2r - m = 2\sqrt{15}$ .

*Somos Péter* (Budapest, Rákóczi F. g. II. o. t.)

*Megjegyzés.* Többen kimondták, hogy a vizsgált háromszögben csak  $O$  (és  $H$ ) elhelyezkedése a különöség, – hogy ti.  $O$  felezi az  $SM$  szakaszt. Bebizonyítható ugyanis, hogy  $M$ ,  $S$ ,  $K$  minden nem egyenlő oldalú háromszögben is egy egyenesen (a háromszög ún. „Euler–féle egyenesén”) fekszik – így pedig az  $SCM$  és  $SDK$  háromszögek hasonlóságából és az  $SC : SD = 2 : 1$  arányból adódik, hogy  $SM = 2SK$ .)